*

Teorien om presise deskriptive utsagn, modallogikk og intensjonal finstruktur.

*

Morten Rognes

1996

*

Innhold

Del I 5
§0 Innledning 6
§1 Relasjonelle strukturer 11
§1.1 Noen bemerkninger om modaliteter. 17
§2 Modalfunksjoner 18
§2.1 Vedrørende forholdet mellom T1 og setnings-modallogikker. 26
§2.2 Kripke-modeller for språket L;m. 26
§2.3 Modallogikker og fullstendighetsresultater. 27
§2.4 Om samsvaret mellom konnektivene i L:m og boolske operasjoner. 28
§2.5 Oppsummering 31
§3 Begrensede modalfunksjoner 32
§4 Begrensede relasjonelle strukturer og modalfunksjoner 39

Del II 49
§0 Innledning. 50
§1 Språket til teorien. 53
§2 Aksiomer i teorien. 54
§3 Relasjonen Tror og begrepet trosfelt. 56
§3.1 Noen bemerkninger om trosfeltet til en person. 58
§4 Deduktivt lukkede mengder av finstrukturerte utsagn. 59
§5 Noen innledende teoremer. 61
§6 Teoremer om rasjonell tro og viten. 64
§7 Intepreterte språk for epistemisk og doxastisk logikk. 70
§7.1 Teoremer om gyldige formler i språk for epistemisk og doxastisk logikk. 73
§8 Noen omstridte spørsmål i forbindelse med viten og tro. 78
§9 Noen flere elementære teoremer i teorien om tro og viten 81
§9.1 Noen flere teoremer 82
§10 Avslutning og oppsummering. 84

Referanser 95

Del I

§0 Innledning

Det er kanskje ikke helt opplagt hvordan man innenfor rammen av teorien T1 kan utvikle og studere modallogikker. Betrakter man teorien ser man at ved siden av de rent mengdeteoretiske predikatene "x er et element i mengden y" og "x er en mengde" inneholder det ikke-logiske vokabularet til teorien bare de tre predikatene "x er et utsagn", "x er en mulig verden hvor utsagnet y er sant" og "x er en logisk mulig verden". Teorien sier derfor ikke noe direkte om hva som menes med at et utsagn er logisk nødvendig sant eller hva som eventuelt kan menes med at et utsagn beskriver et forhold som er logisk mulig.

Dette kan man prøve å rette på ved å innføre et nytt ikke-logisk predikat i språket: "x er et utsagn som er nødvendig sant i verdenen w". La oss bruke "Nec(x,w)" som forkortelse for dette uttrykket. Spørsmålet oppstår i så fall om man behøver å innføre dette som et primitivt predikat eller om det er mulig å definere det ved hjelp av de andre primitive predikatene som inngår i språket til teorien. Begge mulighetene kan undersøkes.

Det virker ikke urimelig å si at et utsagn er nødvendig sant i en mulig verden w hvis og bare hvis utsagnet er sant i alle logisk mulige verdener. Betyr ikke "logisk nødvendig" det samme om "sannhet i alle logisk mulige verdener"?
I så fall virker det nærliggende å foreslå den følgende definisjon av predikatet "Nec(x,w)":

D1 Nec(x,w) <–> (wêI & xêU & (Aw)(wêI –> True(w,x)))

Som man ser når man betrakter denne definisjonen er det bare predikater som inngår i vokabularet til teorien T1 som her brukes i definiens. Definisjonen uttrykker at et nødvendig og tilstrekkelig vilkår for at et utsagn x er nødvendig sant i verdenen w er at x er et utsagn og w er en logisk mulig verden og at utsagnet x er sant i enhver logisk mulig verden.

D1 er en meget naturlig definisjon av logisk nødvendighet innenfor rammen av T1. Det nødvendighetsbegrep som fastsettes av denne definisjonen svarer til det som man har i tankene ved det velkjente modalsystemet S5. Det virker ikke unaturlig å si at hvis det virkelig er logisk nødvendighet man er ute etter å eksplisere så er dette en meget plausibel definisjon.

Det er imidlertid klart at denne definisjonen ikke vil være tilfredstillende for dem som finner uttrykket "logisk mulig verden" uklart på forhånd. Men det bør i denne forbindelse understrekes at en dypere diskusjon av mulige definisjoner av uttrykket "logisk mulig verden", hvor man hverken direkte eller indirekte griper tilbake til begreper som har med utsagn, selvmotsigelsesfrihet, implikasjon eller andre intensjonalt pregete begreper å gjøre faller utenfor rammen av dette essay.

Fra det som er nevnt ovenfor skulle det fremgå at det i og for seg er mulig å definere predikatet "Nec(x,w)" innenfor rammen av T1. Men det er teoretisk sett intet som nødvendigvis tilsier eller tvinger en til å benytte en slik fremgangsmåte.

La oss derfor se på den mulighet at man innfører predikatet som et nytt primitivt predikat i teorien T1. Dette innebærer at det ikke-logiske vokabularet til T1 utvides med dette predikatet. I så fall kunne man utvide teorien T1 med D1 som et nytt ikke-logisk aksiom. I stedet for å gjøre dette skal vi imidlertid heller betrakte endel svakere setninger om relasjonen Nec.

Den første setningen som betraktes sier at om x er et utsagn som er logisk nødvendig sant i verdenen w så er x et utsagn og w en logisk mulig verden. Denne påstanden kan formaliseres på den følgende måte:

N1 Nec(x,w) –> (xêU & wêI)

En annen setning som det er meget nærliggende å betrakte i denne forbindelse er denne: Er x og y to utsagn der y er en logisk konsekvens av x og der man har at utsagnet x er logisk nødvendig sant i verdenen w virker det også svært rimelig å betrakte utsagnet y som logisk nødvendig sant i verdenen w. Påstanden kan uttrykkes slik:

N2 Nec(x,w) & yêU & LK(y,x) –> Nec(y,w)

En tredje setning som det er naturlig å nevne sier at dersom alle utsagnene i en ikke-tom mengde med utsagn er logisk nødvendig sanne i verdenen w så er også konjunksjonen av alle utsagnene i mengden et utsagn som er logisk nødvendig sant i verdenen w:

N3 ΔêPt(U) & Δ≠ø & wêI (Ay)(yêΔ –> Nec(y,w)) –> Nec(SNu(Δ),w)

Det tautologiske utsagnet, dvs. det utsagnet som er nødvendig sant, er per definisjon det utsagnet som er sant i alle logisk mulige verdener. Vi betegner dette med "t" og har at t=μ;-1(I). Dette utsagnet virker det svært rimelig å anse som logisk nødvendig sant i enhver logisk mulig verden. Den følgende formel uttrykker dette:

N4 wêI –> Nec(μ;-1(I))

Betrakter man nå N1 – N4 ser man forholdsvis lett at disse fire setningene kan utledes i teorien T1 om "Nec(x,w)" defineres som ved D1. Studeres D1 ser man at definisjonen impliserer at et utsagn er nødvendig sant i en verden w hvis og bare hvis mengden av alle logisk mulige verdener er inkludert i sannhetsmengden til utsagnet. Men siden det bare er ett utsagn som er slik at I er inkludert i det , nemlig det nødvendige utsagn, følger det at dette utsagnet selv er nødvendig sant i enhver verden. Dette viser at N4 holder. At N1 holder om man legger definisjonen D1 til grunn skulle være helt opplagt. Siden enhver logisk konsekvens av det nødvendige utsagn er dette utsagnet selv følger det at N2 åpenbart holder. Og siden man innser ved hjelp av D1 at enhver mengde av utsagn som inneholder nødvendig sanne utsagn må være enhetsmengden som inneholder det nødvendig sanne utsagnet t, følger det at N3 også holder.

To fremgangsmåter har nå blitt beskrevet i forbindelse med predikatet "Nec(x,w)". Også en tredje fremgangsmåte er mulig; en fremgangsmåte som det er nærliggende å sammenligne med de to som har blitt nevnt. I stedet for å utvide språket til T1, la oss nå kalle det L, med konstruksjonen "x er et utsagn som er logisk nødvendig sant i verdenen w", kunne man i stedet utvide det med relasjonsuttrykket:

> "y er en verden som logisk sett er forenelig med alt det som er nødvendig sant
> i verdenen x"

Denne konstruksjonen skal i det følgende forkortes med "xRy". Språket til T1 utvidet med dette predikatet som nytt ikke-logisk predikat vil i akkurat dette avsnittet bli betegnet med "L'".

Når det gjelder predikatet "xRy" skulle den følgende setning i L' åpenbart kunne regnes for sann:

R1 (Ax)(Ay)(xRy –> x,yêI)

Dette skulle knapt trenge noen flere kommentarer. Det dreier seg om en ren trivialitet.

Anta nå at x er et utsagn som er nødvendig sant i verdenen w. Da virker det fornuftig å hevde at x også må være sant i alle de verdener w' som logisk sett er forenelige med alt det som er nødvendig sant i verdenen w. Det omvendte virker også rimelig: Er et utsagn x sant i alle de verdener w' som er forenelige med alt det som er logisk nødvendig i verdenen w synes det riktig å hevde at x også må være sant i w. På grunnlag av dette virker det nærliggende å foreslå den følgende definisjon av uttrykket "Nec(x,w)":

R2 Nec(x,w) <–> wêI & xêU & (Aw')(wRw' –> True(w',x))

Dette må, som nevnt, oppfattes som en definisjon av "Nec(x,w)" siden predikatet ikke inngår som primitivt predikat i L'.

Flere ting kan bemerkes i forbindelse med setningen R1 og definisjonen R2:

For det første kan man nevne at i teorien T1 med L utvidet til L', og R1 tilføyd som et nytt ikke-logisk aksiom, kan man – om R2 benyttes som definisjon av "Nec(x,w)" – utlede setningene N1 –N4 som ble nevnt ovenfor.

For det andre kan det nevnes at dersom man utvider teorien T1 med aksiomene N1 – N4 som nye ikke-logiske aksiomer kan man i den resulterende teori utlede både R1 og R2 om relasjonen R defineres på den følgende måte:

R = Mg(<x,y>: x,yêI & yêSNu(Mg(x: Nec(x,w))))

De to forhold som nå er omtalt viser at disse to utvidelsene av T1 i en viss forstand er ekvivalente.

I ingen av de to sistnevte utvidelsene av T1 kan man utlede at et utsagn er nødvendig sant i en verden w hvis og bare hvis det er sant i alle logisk mulige verdener. Men dette kan utledes i teorien T1 utvidet med R1 og R2 om man i tillegg antar:

(+) (Ax)(Ay)(x,yêI –> xRy)

Ser man på den første teorien, nemlig T1 utvidet med D1 som definisjon av "Nec(x,w)", er det med en gang klart at hvis x er et utsagn som er logisk nødvendig sant i verdenen w så er utsagnet x også sant i verdenen w. Dette følger umiddelbart fra definisjonen D1.

Dette er imidlertid ikke tilfelle i teorien T1 utvidet med "Nec(x,w)" som nytt primitivt predikat og N1 – N4 som nye ikke-logiske aksiomer. I denne teorien må man postulere direkte at ethvert utsagn som er logisk nødvendig sant i verdenen w også er sant i verdenen w siden dette ikke lar seg utlede ved hjelp av aksiomene N1 – N4.

Dette gjelder også den sistnevnte teorien, dvs. T1 utvidet med "xRy" som nytt predikat og R1 og R2 som henholdsvis nytt ikke-logisk aksiom og ny definisjon. Legger man imidlertid til:

R3 (Aw)(wêI –> wRw)

mao. at R er refleksiv ser man lett at ethvert nødvendig sant utsagn er sant, dvs. at Nec(x,w) –> True(w,x) holder for alle w og x. En bemerkning til slutt i denne forbindelse. I lys av R2 har man at:

Nec(x,w) <–> (xêU & wêI & (Aw')(wRw' –> True(w',x)))

Setter man høyre side av denne ekvivalensen inn for "Nec(x,w)" i setningen "Nec(x,w) –> True(x,w)" får man:

(*) (xêU & wêI & (Aw')(wRw' –> True(w',x))) –> True(w,x)

La A være den universelle lukningen av (*). Man kan da spørre om A impliserer R3 innenfor rammen av den sistnevnte teorien. Det viser seg at svaret på dette er bekreftende, men vi skal komme tilbake til dette i avsnittet om relasjonelle strukturer.

La oss foreta en oppsummering så langt. I hovedsaken har vi beskrevet tre teorier om logisk nødvendig sannhet: (a) Den første teorien som ble omtalt var rett og slett teorien T1 utvidet med definisjonen D1. (b) Den andre teorien som ble introdusert var en utvidelse av teorien T1. Språket til T1 ble utvidet med "Nec(x,w)" som nytt ikke-logisk predikat. Dessuten ble N1 – N4 tilføyd som nye ikke-logiske aksiomer. (c) Den tredje teorien var igjen en utvidelse av T1. Språket til T1 ble nå utvidet med predikatet "xRy" og de ikke-logiske aksiomene ble utvidet med setningen R1. I denne teorien blir "Nec(x,w)" innført som et definert predikat ved hjelp av definisjonen R2.

Det kan i det følgende være gunstig å innføre noen treffende og forholds-vis korte navn på disse tre teoriene. Den første, T1, har vi tidligere kalt for *teorien om presise deskriptive utsagn*. Den vil også figurere under dette navn i det følgende. Teorien nevnt under punkt (c) skal vi i det følgende kalle for *den relasjonelle teorien om logisk nødvendighet*. Dette virker ikke altfor kunstig. Tross alt innfører man her relasjonen R i tillegg til grunnbegrepene i T1 og definerer logisk nødvendighet ved hjelp av denne relasjonen. Derimot er det mer vrient å finne et passende navn på teorien nevnt under punkt (b) som er tilstrekkelig suggestivt. Vi skal kalle denne teorien for *utsagnsteorien om logisk nødvendighet* selvom dette navnevalg ikke er spesielt opplysende.

Tilslutt bør det understrekes at disse tre teoriene er intepreterte teorier og ikke bør oppfattes som bare uintepreterte formelle systemer. En tilhenger av f.eks. den relasjonelle teorien om logisk nødvendighet er forpliktet til å godta den påstand at det faktisk finnes en mengde med ordnete par <x,y> der x og y er mulige verdener og hvor verdenen y er forenelig med alt det som er logisk nødvendig i verdenen x. Er denne påstanden gal så er også den relasjonelle teorien om logisk nødvendighet gal.

Endel av hensikten med dette arbeidet er å utvikle konsekvensene av de teoriene som nå har blitt beskrevet slik at man får et bedre innblikk i hva som følger fra dem og hvordan de er relatert til hverandre. I denne forbindelse skal vi innføre to viktige begreper, nemlig begrepet *relasjonell struktur* og begrepet *modalfunksjon*. Etterhvert vil også to andre typer av strukturer bli studert i forbindelse med relasjonelle strukturer, nemlig begrensede relasjonelle strukturer og det vi vil kalle for "normale" begrensede relasjonelle strukturer. På samme vis vil også ytterligere to strukturklasser bli studert i forbindelse med modalfunksjoner. Den ene av disse strukturklassene er mengden av begrensede modalfunksjoner. Den andre skal vi omtale som mengden av normale begrensede modalfunksjoner.

La oss først studere klassen av relasjonelle strukturer og forklare hvilken betydning de har når det gjelder spørsmålet om å få et mer fyldig innblikk i hvilke teoremer som kan utledes i den relasjonelle teorien om logisk nødvendighet.

En relasjonell struktur er et hvilket som helst ordnet par <X,R> der X er en ikke-tom mengde og hvor R er en relasjon over X, mao. hvor R Inkl XxX. I forbindelse med en slik relasjonell struktur <X,R> innfører vi en operator
L: Pt(X) –> Pt(X) som er definert på den følgende måte:

L(a) = Mg(x: xêX & (Ay)(xRy –> yêa)) der aêPt(X).

Denne operatoren L kaller vi for nødvendighetsoperatoren over strukturen <X,R>.

I den neste paragrafen vil vi studere en rekke setninger som gjelder for nødvendighetsoperatoren i enhver relasjonell struktur. Dette innebærer at alle disse setningene også holder for nødvendighetsoperatoren i en hver spesiell, konkret relasjonell struktur.

Ser man nå på den relasjonelle teorien om logisk nødvendighet som vi spesifiserte ovenfor er det klart at denne impliserer at <I,R> er en relasjonell struktur. Definerer man nå en operasjon N ved N(x)= Mg(w: Nec(µ;-1(x),w)) om xêPt(I) ser man også lett at N i lys av definisjonen D2 er en nødvendighets-operator over <I,R> i den betydningen som ble nevnt ovenfor. Alle de setninger som gjelder om nødvendighetsoperatoren i en relasjonell struktur generelt vil derfor også gjelde om N i forhold til den spesielle strukturen <I,R>.

Det skulle derfor være klart at man vinner noe ved å studere relasjonelle strukturer i sin allminnelighet. Har man utledet en lang rekke satser som gjelder for enhver relasjonell struktur og nødvendighetsoperatoren over en slik struktur kan alle disse satsene anvendes umiddelbart på enhver helt spesiell slik struktur, som f.eks. <I,R>, og gjelde for denne. Man behøver følgelig ikke separat å bevise at satsene holder for <I,R>.

Innenfor klassen av relasjonelle strukturer kan man også studere delmengder som fremkommer ved at man legger forskjellige krav på relasjonen R. Man kan f. eks. studere klassen av alle de relasjonelle strukturer der R er seriell, dvs. er slik at (Ax)(xêX –> (Ey)(yêX & xRy)), klassen av alle de strukturer der R er refleksiv, videre klassen av de strukturklasser som svarer til kravene om at R skal være transitiv, symmetrisk og evklidisk. La oss bemerke at en relasjon R over en mengde X i denne sammenheng kalles evklidisk hvis og bare hvis man har at (Ax)(Ay)(Az)(xRy & xRz –> yRz).

Ovenfor ble det nevnt at vi også ville innføre begrepet modalfunksjon. La oss gjøre dette og gi en kort orientering om hvordan det er relatert til utsagnsteorien om logisk nødvendighet.

Med en modalfunksjon forstås et ordnet par <X,N> som oppfyller de følgende krav: For det første kreves det at X er en ikke-tom mengde og at N er en funksjon som til hvert element i X tilordner en mengde av delmengder av X. Dette innebærer at N: X –> Pt(Pt(X)). For det andre kreves det at funksjonen N oppfyller de følgende krav for alle a og xêX:

(i) aêPt(Pt(X)) & a≠ø & a Inkl N(x) –> SN(a)êN(x)
(ii) a,bêPt(X) & aêN(x) & a Inkl b. –> bêN(x)
(iii) XêN(x)

Dette avslutter listen over krav og dermed definisjonen. Som man ser sier det første kravet at dersom a er en familie av mengder som er inkludert i den mengdefamilien som N tilordner x så er også snittet av mengdene i familien a med i N(x). Det andre kravet sier at dersom aog b er to delmengder av X hvor a er inkludert i b og hvor a er med i N(x) så er også b med i N(x). Det siste kravet innebærer at mengden X selv er med i N(x) for hvert X.

Hvordan er så denne typen strukturer relatert til utsagnsteorien om logisk nødvendighet? Er <X,N> en modalfunksjon er det intuitivt sett meningen at elementene i mengden X skal representere de mulige verdenene. De enkelte delmengder av X representerer utsagn i det man tenker seg at ethvert utsagn entydig bestemmer en mengde med mulige verdener, nemlig de der utsagnet er sant, og dessuten at enhver mengde med mulige verdener bestemmer et utsagn. Intuitivt sett er det videre hensikten at N skal representere en funksjon som til enhver mulig verden x tilordner klassen av alle de utsagn som er nødvendig sanne i "verdenen" x. Oppfattet på denne måten virker kravene (i) – (iii) svært rimelige.

Definer en funksjon H fra I inn i Pt(Pt(I)) ved:

H(w)= Mg(a: aêPt(I) &Nec(µ;-1(a),w)) forutsatt at wêI.

Man kan nå lett vise i utsagnsteorien om logisk nødvendighet at <I,H> er en modalfunksjon i den betydning som har blitt forklart ovenfor.

§1 Relasjonelle strukturer

Definisjon 1.1 Med en relasjonell struktur forstår vi et par <X,R> der de enkelte komponentene X og R oppfyller de følgende krav

(i) X er en ikke-tom mengde.
(ii) R er en relasjon over X , ie. R Inkl Prod(X,X)

Vi definerer relativt til en slik struktur <X,R> en operator L: Pt(X) –> Pt(X) ved:

(2) L(a) = Mg(w: wêX & (Az)(zêX & wRz–> zêa))

L kalles for nødvendighetsoperatoren over strukturen <X,R>.
På tilsvarende måte innføres en dual operator P: Pt(X)–>Pt(X) over strukturen <X,R> ved:

P(a) = Mg(w: wêX & (Ez)(zêX & wRz& zêa))

P kalles for mulighetsoperatoren over <X,R>.

I forbindelse med relasjonelle strukturer innfører vi også de følgende begreper: Komplementet til en delmengde x av X med hensyn på X betegner vi nå med "–x". Snittet av to mengder x,yêPt(X) betegnes med xΩy. Videre betegnes unionen av to mengder x,yêPt(X) med xUy. Vi innfører også uttrykket "x=>y" som forkortelse for "(–x)Uy" og skal tillate oss å kalle x=>y for "kondisjonalen med x som antesedent og y som konsekvent". Dessuten innføres uttrykket "x<=>y" om forkortelse for "((–x)Uy)Ω(xU(–y))". Er x,yêPt(X) kaller vi x<=>y for bikondisjonalen med x som venstre komponent og y som høyre komponent. Vi kaller en mengde i strukturen <X,R> for "tautologisk" om den er identisk med X.

Gitt disse definisjonene holder det følgende teorem:

Teorem 1.0 Anta <X,R> er en relasjonell struktur og at L er nødvendighetsoperatoren over <X,R>. Anta a, b, c er delmengder av X. Da er de følgende mengder tautologiske:

(i) a=>(b=>a)
(ii) (–b => –a) =>(a=>b)
(iii) (a=>(b=>c)) => ((a=>b)=>(a=>c))
(iv) Er a og a=>b tautologiske mengder er også b en tautologisk mengde.

Man ser den åpenbare analogien mellom formlene (i) – (iii) og et vanlig sett av aksiomer for setningslogikken. Videre svarer (iv) til slutningsregelen modus ponens i setningslogikken.

Operasjonen L/n/ over en relasjonell struktur <X,R>, der nêNat, dvs. der n er et naturlig tall, er induktivt definert ved følgende to klausuler:

(i) L/0/(a) = a (ii) L/n+1/(a)= L(L/n/(a))

Her forutsettes det selvfølgelig at aêPt(X). På tilsvarende måte defineres den duale operator P/n/ ved:

(ii) P/0/(a) = a (ii) P/n+1/(a)= P(P/n/(a))

Man har nå at den følgende sats holder:

Teorem 1.1 Anta <X,R> er en relasjonell struktur. Da gjelder:

(i) P(a)<=> –L(–a) er en tautologisk mengde.
(ii) L(a) <=> –P(–a) er en tautologisk mengde.
(iii) L(–a) <=> –P(a) er en tautologisk mengde.
(iv) –L(a) <=> P(–a) er en tautologisk mengde.
(v) P/n/(a) <=> –L/n/(–a) er en tautologisk mengde.
(vi) Er a en tautologisk mengde er også L/n/(a) en tautologisk mengde.

(vii) Er a;1,....,a;m,aêPt(X) og er a;1Ω...Ωa;m => a en tautologisk mengde er også L/n/(a;1)Ω....ΩL/n/(a;m)=>L/n/(a) en tautologisk mengde.
(viii) Er a,bêPt(X) og er a=>b en tautologisk mengde så er også L/n/(a)=>L/n/(b) en tautologisk mengde.
(ix) Er a,b,cêPt(X) og er aΩb=>c en tautologisk mengde er også L/n/(a)ΩL/n/(b)=> L/n/(c) en tautologisk mengde.
(x) Er a,bêPt(X) og a<=>b en tautologisk mengde er også L/n/(a)<=>L/n/(b) en tautologisk mengde.
(xi) L/n/(X) er en tautologisk mengde.
(xii) Er a,bêPt(X) er L/n/(aΩb) => L/n/(a)ΩL/n/(b) tautologisk.
(xiii) Er a,bêPt(X) er L/n/(a)ΩL/n/(b) => L/n/(aΩb) tautologisk.
(xiv) Er a,bêPt(X) er L/n/(aΩb) <=> L/n/(a)ΩL/n/(b) tautologisk.
(xv) Er a,bêPt(X) er L/n/(a=>b) => (L/n/(a)=>L/n/(b)) tautologisk.

Bevis: Nesten alle punktene i denne satsen er meget lette å bevise. Beviset overlates derfor til leseren. **Q.E.D.**

Den neste satsen representerer den duale sats til det foregående teorem. Man har:

Teorem 1.2 Anta <X,R> er en relasjonell struktur. Da gjelder:
(i) L/n/(a) <=> –P/n/(–a) er en tautologisk mengde.
(ii) Er –a en tautologisk mengde er også –P/n/(a) en tautologisk mengde.
(iii) Er a;1,....,a;m,aêPt(X) og er a => a;1U...Ua;m en tautologisk mengde er også P/n/(a)=>P/n/(a;1)U....UP/n/(a;m) en tautologisk mengde.
(iv) Er a,bêPt(X) og er a=>b en tautologisk mengde så er også P/n/(a)=>P/n/(b) en tautologisk mengde.
(v) Er a,b,cêPt(X) og er a=>bUc en tautologisk mengde er også P/n/(a)=> P/n/(b)UP/n/(c) en tautologisk mengde.
(vi) Er a,bêPt(X) og a<=>b en tautologisk mengde er også P/n/(a)<=>P/n/(b) en tautologisk mengde.
(vii) –P/n/(ø) er en tautologisk mengde.
(viii) Er a,bêPt(X) er P/n/(aUb) => P/n/(a)UP/n/(b) tautologisk.
(ix) Er a,bêPt(X) er P/n/(a)UP/n/(b) => P/n/(aUb) tautologisk.
(x) Er a,bêPt(X) er P/n/(aUb) <=> P/n/(a)ΩP/n/(b) tautologisk.
(xi) Er a,bêPt(X) er (–P/n/(a))ΩP/n/(b) => P/n/((–a)Ωb) tautologisk.

Bevis: Også når det gjelder denne satsen overlater vi beviset til leseren. **Q.E.D.**

Teorem 1.3 Anta <X,R> er en relasjonell struktur. Da gjelder at de følgende mengder er tautologiske:
(i) L(a)=>L(b=>a)
(ii) L(–a)=>L(a=>b)
(iii) P(X) <=> –L(ø)
(iv) L(a<=>b) => (P(a)<=>P(b))
(v) L(a<=>b) => (L(a) <=>L(b))
(vi) L(a)UL(b) => L(aUb)
(vii) P(aΩb) => P(a)ΩP(b)

(viii) L(a)ΩP(b) => P(aΩb)
(ix) L(aUb) => P(a)UL(b)
(x) P(a=>b)UL(b=>a)
(xi) P(a =>b) <=> (L(a) =>P(b))
(xii) P(X) <=> (L(a) =>P(b))
(xiii) (P(a) =>L(b)) => L(a=>b)
(xiv) (P(a) => L(b)) => (L(a) => L(b))
(xv) (P(a) => L(b)) => (P(a) => P(b))

Bevis: Beviset overlates til leseren. **Q.E.D.**

Også den følgende sats lar seg meget lett bevise:

Teorem 1. 4 Anta <X,R> er en relasjonell struktur og at L er nødvendighets-operatoren over <X,R>. Anta a, b er delmengder av X. Da er de følgende mengder tautologiske:
(i) LL(a) <=>–PP(–a)
(ii) LL(–a) <=> –PP(a)
(iii) PP(–a) <=> –LL(a)
(iv) LP(–a) <=> –PL(a)
(v) LP(–a) <=> –PL(a)
(vi) –P(aUb) <=> –P(a)Ω–P(b)
(vii) P(aUb) <=> P(a)UP(b)
(viii) L(a=>b) => (P(a) => P(b))
(xi) L((–a)=>a) <=> L(a)
(xii) L(a=>(–a)) <=> L(–a)
(xiii) L((–b)=>a)ΩL(b=>a). <=> L(a)
(xvi) L(a) =>(P(b) => P(aΩb))
(xvii) Er a en tautologisk mengde så er M(b)=>M(aΩb) det også.

Bevisene for disse satsene er rent trivielle øvelser og overlates derfor til leseren.

Teorem 1.5 Anta <X,R> er en relasjonell struktur og at L og P er henholdsvis nødvendighets-operatoren og mulighetsoperatoren over <X,R>.
Har man da at (Ax)(xêX –> (Ey)(yêX & xRy)) gjelder at mengden
(vi) L(a)=>P(a) er tautologisk.
Er R i tillegg refleksiv, dvs. har man (Ax)(xêX –> xRx), har man at den følgende mengde er tautologisk:
(v) L(a) => a
Er R en transitiv relasjon er
(vii) L(a)=>LL(a) tautologisk
Er R en symmetrisk relasjon gjelder at
(viii) a=>LP(a) er tautologisk.
Er R en evklidisk relasjon, dvs. har man
(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêX &xRy & xRz –> yRz) har man at
(ix) P(a)=>LP(a) er tautologisk.

Teorem 1. 6 Anta <X,R> er en relasjonell struktur . Da har man at følgende holder:

(i) Gjelder (Aa)(aêPt(X) –> [L(a)=>P(a)]=X) har man at R er seriell, dvs. at
(Ax)(xêX –> (Ey)(yêX &xRy))
(ii) Gjelder (Aa)(aêPt(X) –> [L(a)=>a]=X) har man at R er refleksiv, dvs. at
(Ax)(xêX –> xRx)
(iii) Gjelder (Aa)(aêPt(X) –> [L(a)=>LL(a)]=X) har man at R er transitiv, dvs. at
(Ax)(x,y,zêX &xRy &yRz –> xRz)
(iv) Gjelder (Aa)(aêPt(X) –> [a=>LP(a)]=X) har man at R er symmetrisk, dvs. at
(Ax)(x,yêX &xRy –> yRx)
(v) Gjelder (Aa)(aêPt(X) –> [P(a)=>LP(a)]=X) har man at R er evklidisk, dvs. at
(Ax)(x,y,zêX &xRy&xRz –> yRz)

Bevis: (i) Anta at <X,R> er en relasjonell struktur. Anta videre at
(1) (Aa)(aêPt(X) –> [L(a)=>P(a)]=X)
Vi ønsker å vise ar R under disse omstendigheter er seriell. Anta derfor for vilkårlige x at (2) xêX. Nå har man at (1) er ekvivalent med:
(3) (Aa)(aêPt(X) –> (Ax)(xêL(a) –>xêP(a)))
I sin tur er denne formelen ekvivalent med:
(4) (Aa)(aêPt(X) –>((Ax)(xêX &(Ay)(xRy –>yêa). –> ¬(xêL(–a))))
Siden nå XêPt(X) følger herav:
(5) (Ax)(xêX &(Ay)(xRy –>yêX). –> ¬(xêL(–X)))
Dette impliserer:
(6) (Ax)(xêX & (Ay)(xRy –>yêX) –>¬(xêX &(Az)(xRz –> zê(–X))))
Nå har man at R Inkl X^2 og derfor at (Ax)(xêX –>(Ay)(xRy –>yêX)). Fra dette og (2) følger så (7) xêX &(Ay)(xRy–>yêX). Dette, (6) og (2) impliserer:
(8) ¬(Az)(xRz –> zê(–X)). Men dette er ekvivalent med (Ez)(zêX&xRz). Siden x var et vilkårlig element i X følger at vi har vist:
(9) (Ax)(xêX –> (Ez)(zêX & xRz)). Dette viser at R er seriell.

(ii) Anta at (1) (Aa)(aêPt(X) –> [L(a)=>a]=X). Det må bevises at R er refleksiv, ie. at (Ax)(xêX –> xRx). Anta følgelig (2) xêX for vilkårlig X. Nå har vi at
(2) (X–{x})êPt(X). Fra (1) følger:
(3) (Aa)(aêPt(X) –> (Ay)(yêX&(Az)(yRz –> zêa). –> yêa))
Fra dette og (2) kan man slutte:
(4) (Ay)(yêX &(Az)(yRz –> zê(X–{x})) –> yê(X–{x}))
Herav kan man i lys av (2) slutte: (Az)(xRz –> zê(X–{x})) –> xê(X–{x}) Siden åpenbart ¬(xê(X–{x})) følger herav ¬(Az)(xRz –>zê(X–{x})). Dette er ekvivalent med: (Ez)(xRz & (zêX –> z=x)). Men siden R Inkl X^2 følger herav:
(Ez)(xRz & z=x) mao. at xRx. Dette viser at R er refleksiv.

(iii) Anta at (Aa)(aêPt(X) –> [L(a)=>LL(a)]=X) Denne formelen er ekvivalent med:
(1) (Aa)(aêPt(X) –> (Aw)(wêX& (Az)(zêX &wRz –> zêa).
–> (Az)(Ar)(wRz &zRr –> rêa))
Det som ønskes bevist er at at (1) sammen med xRy & yRz impliserer xRz. Anta derfor (2) xRy & yRz for vilkårlige x,y,zêX. Sett per definisjon (2) b= Mg(z: xRz). Da har man bêPt(X) og instansieres (1) med hensyn på b får man:
(3) (Aw)(wêX& (Az)(zêX &wRz –> zêb).

–> (Az)(Ar)(wRz &zRr –> rêb))

Fra dette har man (4) (Az)(zêX &xRz –> zêb). –> (Az)(Ar)(xRz &zRr –> rêb)). Fra (2) følger åpenbart (Az)(xRz –> zêb). Dette og (4) gir en:

(Az)(Ar)(xRz &zRr –> rêMg(z; xRz)). Herav: (Az)(Ar)(xRz &zRr –> xRr). Men dette og (2) impliserer åpenbart at xRz som er det vi ønsker.

(iv) Anta at (1) (Aa)(aêPt(X) –> [a=>LP(a)]=X) for å vise at R da må være refleksiv. (1) er ekvivalent med:

(2) (Aa)(aêPt(X) –> (Aw)(wêa –> (Az)(wRz –> (Er)(zRr & rêa))))

Anta nå for vilkårlige x,y at (2) xRy. Sett per definisjon b={x}. Da har man åpenbart at bêPt(X). Fra dette og (2) følger:

(3) (Aw)(wêb –> (Az)(wRz –> (Er)(zRr & rêb))) Herav:

(4) (Aw)(w=x –> (Az)(wRz –> (Er)(zRr & r=x)). Man ser at dette impliserer: (Ax)(Az)(xRz –> zRx). Dette viser at R er symmetrisk.

(v) Anta (1) (Aa)(aêPt(X) –> [P(a)=>LP(a)]=X). Vi skal da vise at R er evklidisk. Nå har man at (1) er ekvivalent med:

(2) (Aa)(aêPt(X) –>
(Ax)((Er)(xRr &rêa) –> (Az)(xRz –> (Ew)(zRw & wêa))))

Anta nå for vilkårlige x,y,z at (3) xRy &xRz. Vi vil vise at yRz. Fra (2) følger siden {y} êPt(X)

(3) (Ax)((Er)(xRr &rê{y}) –> (Az)(xRz –> (Ew)(zRw & wê{y})))

Dette er i sin tur ekvivalent med:

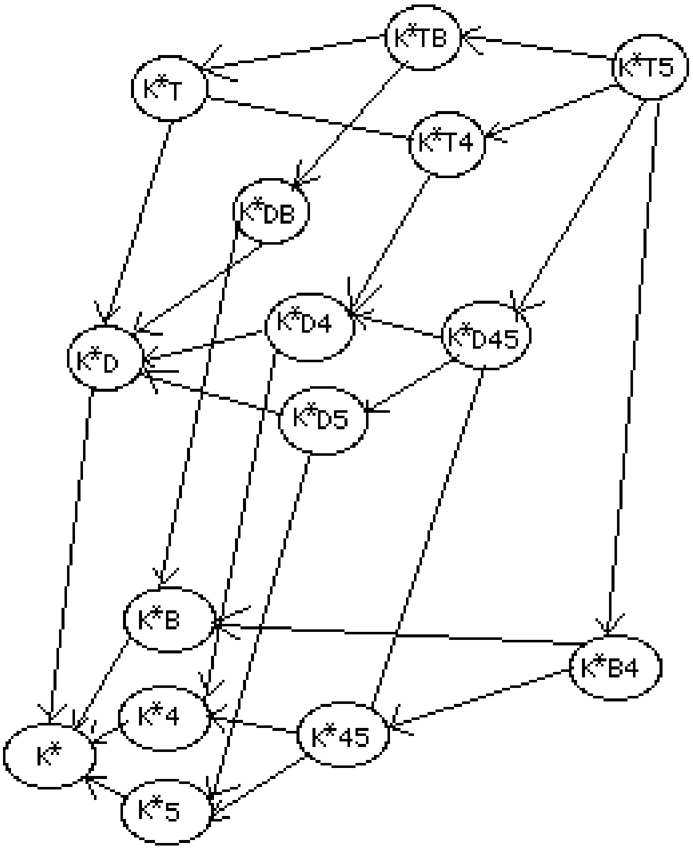
(4) (Ax)(xRy –> (Az)(xRz –> zRy)). Fra dette og (3) følger zRy. Det har derfor blitt bevist at (Ax)(Ay)(Az)(xRy & xRz –> zRy). Dette er åpenbart ekvivalent med (Ax)(Ay)(Az)(xRy & xRz –> yRz). R er følgelig evklidisk.

Dette avslutter beviset for Teorem 1.6. **Q.E.D.**

I det følgende skal vi betegne kravet om at relasjonen R i en relasjonell struktur er seriell med D. Kravet om at R er refleksiv vil vi betegne med T. Videre vil vi betegne kravene om at R er symmetrisk, transitiv og evklidisk med henholdsvis B, 4 og 5. Når det gjelder disse fem kravene er det i alt 2^5=32 kombinasjoner av krav som er mulige. Til enhver slik kombinasjon vil det også svare en klasse av relasjonelle strukturer, nemlig de relasjonelle strukturene der relasjonen R oppfyller kravene. Vi betegner de enkelte kombinasjoner av krav med "DT4", "TB", "DTB5" osv. Klassen av alle relasjonelle strukturer betegnes med K*. Klassen av alle de relasjonelle strukturene som oppfyller en bestemt kombinasjon av krav, la oss si "DTB4", skal vi betegne ved å føye til denne kombinasjonen av krav etter "K*". "K*DTB4" vil derfor betegne klassen av alle de relasjonelle strukturer som oppfyller kravene D, T, B og 4, dvs. alle de relasjonelle strukturer som er serielle,refleksive, symmetriske og transitive. Av de 32 mulige klassene av relasjonelle strukturer som kan defineres på denne måten er det bare 15 som er distinkte. Disse er angitt på den følgende figur[1]:

---

[1] Figuren er hentet fra Chellas [1], side 132.



Når det gjelder denne figuren indikerer en pil som peker fra en klasse av relasjonelle strukturer til en annen at den første er strengt inkludert i den andre. Eksempelvis er da klassen K*B4 strengt inkludert i klassen K*45. Vi skal ikke verifisere i detalj at av alle de 32 klassene er det bare disse femten som er distinkte.

Teorem 1. 7 Anta <X,R> er en relasjonell struktur og at L er nødvendighetsoperatoren over <X,R>. Anta videre at R er transitiv og refleksiv. Anta a, b er delmengder av X. Da er de følgende mengder tautologiske:

(i) L(a) =>LL(a)
(ii) PP(a) => P(a)
(iii) L(a) <=> LL(a)
(iv) P(a) <=> PP(a)
(v) PLP(a) => P(a)
(vi) LP(a) => LPLP(a)
(vii) LP(a) <=> LPLP(a)
(viii) PL(a) <=> PLPL(a)

Merk at (i) er analog med det karakteristiske S4-aksiomet i vanlig setningsmodal-logikk.

Teorem 1. 8 Anta <X,R> er en relasjonell struktur og at L er nødvendighetsoperatoren over <X,R>. Anta videre at R er en refleksiv,transitiv og symmetrisk relasjon over X. Anta a, b er delmengder av X. Da er de følgende mengder tautologiske:

(i) P(a)=>LP(a)
(ii) PL(a) =>L(a)

(iii) P(a) <=> PL(a)
(iv) L(a) <=> PL(a)
(v) L(a) <=> LL(a)
(vi) L(aUb) => L(a)UP(b)
(vii) L(aUL(a)) <=> L(a)UL(b)
(viii) L(aUP(b)) <=> L(a)UP(b)
(ix) P(aΩP(b)) <=> P(a) Ω P(b)
(x) P(aΩ L(b)) <=> P(a)Ω L(b)

§1.1 Noen bemerkninger om modaliteter.

Anta <X,R> er en relasjonell struktur og at L og P henholdsvis er nødvendighetsoperatoren og mulighetsoperatoren over <X,R>. I det følgende betegner "i" operasjonen som til enhver delmengde av X tilordner denne selv, ie. som er slik at i(a)=a for alle aêPt(X). Anta f er en sekvens av lengde n≥1 der f(n) enten er L eller P, i, eller ¬. Anta aêPt(X). Definer funkjonen G(f,k,a), der f er en modalitet av lengde n og k≤n, induktivt ved:
(i) G(f,1,a)= f(1)(a).
(ii) G(f,k+1,a)= f(k+1)(G(f,k,a)) om k<n
Da har man at G(f,r,a)êPt(X) for alle r≤n.
Anta f er en modalitet av lengde n og g er en modalitet av lengde m. Da sies f og g å være ekvivalente om G(f,n,a)=G(g,m,a) for alle aêPt(X). En modalitet kan representeres ved en sekvens av tegnene "L","P","¬" og "*" der "*" representerer identitetsoperatoren. I en refleksiv og transitiv struktur vil f.eks. modalitetene representert ved "LL" og "L" være ekvivalente. La f være en modalitet av lengde n≥1. Da sies den å være på standardform hvis og bare hvis f(k) for k<n enten er L eller P og f(k) enten er ¬,P eller L om k=n eller det er slik at f har lengde lik 1 og f(1)=i. Modaliteten representert ved tegnsekvensen "¬LLLLPLLL" vil derfor være på standardform, mens derimot "PP¬¬L¬LPL" ikke er det. Det skulle være klart at enhver modalitet er ekvivalent med en som er på standardform. Påstanden kan formuleres eksplisitt slik:

Teorem: Er f en modalitet av lengde n≥1 finnes det alltid en modalitet g av lengde m≤n som er på standardform og som er ekvivalent med f.

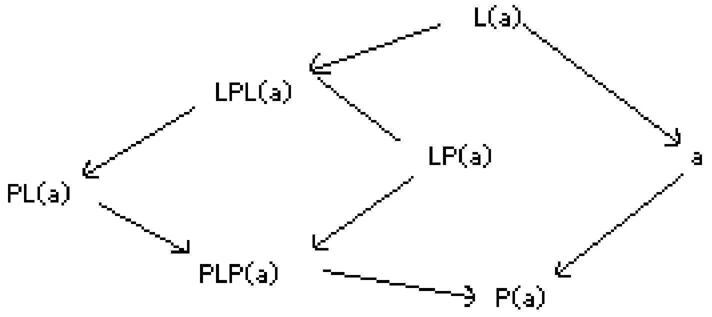
Bevis: Satsen bevises ved induksjon på lengden av modaliteter. Den holder åpenbart for alle modaliteter av lengde 1. For er f en slik modalitet må åpenbart f(1) enten være ¬,L, i, eller P, og da er det klart at den har standardform. Anta at satsen holder for alle modaliteter av lengde n≥1. Vi skal da vise at den holder for alle modaliteter av lengde n+1. Anta f er en modalitet av lengde n+1. Da vil f med domenet begrenset til {1,...,n}, la oss kalle denne sekvensen f' være en modalitet av lengde n. I følge induksjonshypotesen vil det da finnes en modalitet g av lengde m≤n som er ekvivalent med f. Dette innebærer at vi har:
(1) G(f',n,a)=G(g,m,a) for alle aêPt(X).
Nå er det fire muligheter når det gjelder f(n+1). f(n+1) kan enten være i,¬,L eller P. Det er videre tre muligheter når det gjelder g. g(m) kan enten være ¬,L eller P. Er f(n+1)=i har man
G(f,n+1,a)= f(n+1)(G(f,n,a))= i(G(f,n,a)) = G(f,n,a) = G(f',n,a)= G(g,m,a)
Dette innebærer at satsen holder i dette tilfellet. Er f(n+1)=¬ har vi:
G(f,n+1,a)= ¬G(f',n,a) = ¬G(g,m,a)
Er da g(m)=¬ er det lett å vise at f er ekvivalent med g begrenset til {1,...,m-1}. I dette tilfellet holder satsen. Er g(m) enten L eller P kan vi definere en ny modalitet g' av lengde m+1 ved å sette g'(j)=g(j) om j≤m og g(m+1)=¬. Da har vi åpenbart at ¬G(g,m,a)=G(g',m+1,a). Er

f(n+1) lik L eller P og g(m)=¬ defineres en ny modalitet g' av lengde av lengde m+1 ved å sette at g'(j)=g(j) om j<m, g'(m)=P om f(n+1)=L og g'(m)=L om f(n+1)=P og g'(m+1)=¬. Man ser da lett at g' og f er ekvivalente og at satsen holder i dette tilfellet. I det tilfellet at f(n+1) er L eller P og g(m) enten er L eller P. I alle disse tilfellene kan vi definere en modalitet av lengde m+1, g', ved å sette g'(j)=g(j) om j≤m, og g'(m+1)=f(n+1). Man ser da lett ved hjelp av (1) at satsen må holde i disse tilfellene. **Q.E.D.**

Vi skal ikke gi noen mer systematiske teoremer angående antallet modaliteter i de enkelte modalsystemene som ble anskueliggjort i figuren i forrige paragraf. I denne forbindelse henviser vi den interesserte leser til Chellas [1] som gir en meget detaljert og grundig redegjørelse for dette. Her skal vi bare innskrenke oss til enkelte bemerkninger når det gjelder modalitene i forbindelse med strukturklassene KT4 og KT5 som svarer til de to klassiske modalsystemene S4 og S5.

Som bekjent er det nøyaktig syv distinkte modaliteter i S4. Disse er fremstilt i det følgende diagram:

FIGUR 1



§2 Modalfunksjoner

Vi ønsker å studere sammenhengen mellom relasjonelle strukturer og en bestemt type funksjoner som vi vil kalle "modalfunksjoner". I innledningen har det allerede blitt gitt en presis definisjon av hva som menes med en modalfunksjon. La oss på dette sted formulere denne definisjonen eksplisitt:

Definisjon 2.1 Med en modalfunksjon forstås et ordnet par <X,N> der X er en ikke-tom mengde og N er en funksjon N: X–>Pt(Pt(X)) som oppfyller følgende krav for alle xêX, a,bêPt(X) og cêPt(Pt(X):

(i) ø≠c Inkl N(x) –> SN(c)êN(x)
(ii) aêN(x) & bêPt(X) & a Inkl b –> bêN(x)
(iii) XêN(x)

Det ble påpekt i §0 at det er en viss sammenheng mellom relasjonelle strukturer og modalfunksjoner. Denne sammenhengen ønsker vi nå å studere i detalj. La oss betegne klassen av alle relasjonelle strukturer med S og klassen av alle modalfunksjoner i betydningen ovenfor med M. La oss definere en funksjon F som har S som domene på følgende måte:

Er s=<X,R> en vilkårlig relasjonell struktur er F(s) modalfunksjonen <X,N> der N er definert ved N(x)= Mg(a: aêPt(X) &(Ay)(xRy –> yêa)) for xêX. Det er imidlertid ikke umiddelbart klart at denne funksjonen avbilder S inn i mengden M. Man må i så fall vise at F(s) oppfyller kravene til en modalfunksjon. La oss først gjøre dette, dvs. vise at <X,N> oppfyller kravene
(i) – (iii) i definisjonen:

(i) Anta at (1) ø≠aêPt(X) og dessuten at (2) a Inkl N(x). Fra (1) følger det at må finnes noe z der zêa og at M(a). Vi skal først bevise at:
(+) (Ay)(yêa –> xêL(y))
Dette følger imidlertid fra (2) og definisjonen av N. Fra (+) og definisjonen av L følger i sin tur:
(3) (Ay)(yêa –> xêMg(w: wêX & (Az)(zêX & wRz–> zêy))
Dette impliserer:
(4) (Ay)(yêa –> (Az)(zêX & xRz –> zêy))
Fra dette følger imidlertid:
(5) (Az)(zêX & xRz –> (Ay)(yêa –> zêy)) og derfor:
(6) (Az)(zêX & xRz –> zêSN(a))
Men fra dette, det at xêX og definisjonen av L kan man slutte: xêL(SN(a)). Herav følger så ved hjelp av definisjonen av N og den forutsetning at aêPt(X) at SN(a)êN(x). Dette er hva vi ønsker.

(ii) Anta (1) aêN(x) & bêPt(X) & a Inkl b. Fra den første konjunkten og definisjonen av funksjonen N følger:
(2) aêPt(X) & xêL(a). Fra dette og definisjonen av L følger i sin tur:
(3) (Az)(zêX & xRz –> zêa) Men siden a Inkl b kan man herav slutte:
(4) (Az)(zêX & xRz –> zêb). Siden xêX følger i så fall ved hjelp av definisjonen av L at:
(5) xêL(b). I lys av forutsetningene er bêPt(X). Fra dette, (5) og definisjonen av N følger så det vi ønsker, nemlig bêN(x). Dette viser at (ii) holder.

(iii) Nå er åpenbart XêPt(X). Man må også ha at (Az)(zêX & xRz–> zêX). Det følger derfor at xêL(X). Fra dette og det at XêPt(X) kan man ved hjelp av definisjonen av N slutte XêN(x).

Man kan nå stille to spørsmål i forbindelse med denne funksjonen: (i) Er den en-entydig? (ii) Avbilder F mengden S på mengden M ?

Når det gjelder det første spørsmålet er svaret bekreftende. Anta s;1=<X;1,R;1> og s;2=<X;2,R;2> er to relasjonelle strukturer og at de er forskjellige. Det er da to muligheter:
(i) X;1≠X2. I dette tilfelle er det også klart F(s;1)≠F(s;2).
(ii) X;1=X;2. I så fall må R;1≠R;2. Da har vi F(s;1) er <X;1,N;1> der
N;1(x) = Mg(a: aêPt(X;1) &(Ay)(xR;1y –> yêa)) for alle xêX;1=X;2
og at F(s;2) er <X;2,N;2> der
N;2(x) = Mg(a: aêPt(X;2) &(Ay)(xR;2y –> yêa)) for alle xêX;1=X;2
Hadde vi nå at F(s;1)=F(s;2) ville dette implisere at N;1(x)=N;2(x) for alle xêX;1 og derfor at:
Mg(a: aêPt(X;1) &(Ay)(xR;1y –> yêa))=Mg(a: aêPt(X;2) &(Ay)(xR;2y –> yêa))
for alle xêX;1. Men fra dette følger i sin tur at:
(Aa)(aêPt(X;1) –> [(Ay)(xR;1y –> yêa) <–> (Ay)(xR;2y –> yêa)]) for alle xêX;1.
Herav:
(Aa)(aêPt(X;1) –> [(Ey)(xR;1y & (yêa)) <–> (Ey)(xR;1y & (yêa))])

for alle xêX;1. Men fra dette følger: (Az)(zêX;1 –> (xR;1z <–> xR;2z)) for alle xêX;1. Siden X;1=X;2 impliserer dette R;1=R;2. Dette viser at funksjonen F er en-entydig.

For å vise at F er på M skal vi først definere en avbildning G av M inn i S. Er m=<X,N> en modalfunksjon er G(m) den relasjonelle strukturen <X,R> der R er definert ved:

R = Mg(<x,y>: x,yêX & yêSN(N(x))) .

Det er klart at G definert på denne måten er en funksjon og at den avbilder M inn i S. Kan man nå vise for alle mêM at F(G(m))=m er det klart at F er på M og at den i så fall er en korrelasjon mellom S og M. For å vise dette vil det være tilstrekkelig å bevise at det følgende holder for alle xêX

N(x) = Mg(a: aêPt(X) & (Ay)(<x,y>êMg(<x,y>: x,yêX & yêSN(N(x))) –> yêa))

Dette er ekvivalent med:

N(x) = Mg(a: aêPt(X) & (Ay)(x,yêX & yêSN(N(x)) –> yêa)) for alle xêX.

Det vil altså være tilstrekkelig å bevise dette siste. Mao. at det følgende holder for alle xêX og aêPt(X):

(1) aêN(x) <–> (Ay)(x,yêX & yêSN(N(x)) –> yêa)

Er aêN(x) og har man yêSN(N(x)) følger det at (Ab)(bêN(x) –> yêa) i lys av definisjonen av snitt. Siden aêN(x) følger da umiddelbart yêa. Dette viser at kondisjonalen mot høyre i (1) holder.

Anta på den annen side at (Ay)(x,yêX & yêSN(N(x)) –> yêa). Dette impliserer: (Ay)(yêX & yêSN(N(x)) –> yêa) siden xêX. Dette i sin tur impliserer at (2) SN(N(x)) Inkl a. Nå har vi fra det første og tredje kravet i definisjonen av modalfunksjon at SN(N(x))êN(x). Fra dette, (2) og det andre kravet i definisjon 2.1 følger at aêN(x). Dette viser at kondisjonalen mot venstre i (1) også holder.

Vi har nå godtgjort at F ikke bare avbilder klassen av de relasjonelle strukturer en-entydig inn i klassen av modalfunksjoner, men at denne avbildningen også er på klassen av modalfunksjoner. Dette innebærer som tidligere nevnt at F er en korrelasjon mellom S og M.

Det er altså slik at (1) F:S –(1-1,på) –>M og at (2) G: M–>S. Dessuten ga vi et bevis for (3) (Ax)(xêM –>F(G(x))=x). Kan man fra disse tre ting slutte at G=F;-1? Kan man slutte at G er en-entydig? Svaret er bekreftende på begge spørsmål. Anta <z,x>,<y,x>êG. Da har vi at G(z)=x og derfor i lys av (3) at F(G(z)) = F(x) = z. Videre har vi i lys av (3) at F(G(y)) =F(x) = y. Det følger herav at z=y. Det følger derfor at G er en-entydig. Anta for reduktio at G≠F;-1. Da må det finnes xêY slik at (4) G(x)≠F;-1(x). Men nå har man i lys av (3) F(G(x))=x=F(F;-1(x)). Siden F er en-entydig følger herav G(x)=F;-(x), noe som åpenbart strider mot (4).

De bemerkningene som vi nå har fremsatt viser at den følgende sats holder:

Teorem 2.1: La S være klassen av alle relasjonelle strukturer og la M være klassen av alle modalfunksjoner. Definer en avbildning F med S som domene ved å sette, om s = <X,R>êS, at F(s) = <X,N> der N er definert ved:

(1) N(x)= Mg(a: aêPt(X) &(Ay)(xRy –> yêa)) for alle xêX

Da gjelder om <X,R> er en vilkårlig relasjonell struktur, xêX, a,bêPt(X) og N er definert som ved (1):

(i) ø≠aêPt(Pt(X)) & a Inkl N(x) –> SN(a)êN(x)
(ii) aêN(x) & bêPt(X) & a Inkl b –> bêN(x)
(iii) XêN(x)

Dessuten gjelder om funksjonen F at:

F: S –(1-1,på) –> M

Tidligere ble det påpekt at man kan avgrense en rekke mer spesielle klasser av relasjonelle strukturer ved å legge forskjellige krav på relasjonen som utgjør den andre komponenten i en slik struktur. Vil det til hvert av disse kravene finnes korresponderende krav til funksjonen N i en modalfunksjon <X,N>? Det følgende teorem viser at dette er tilfelle:

Teorem 2.2 Anta <X,R> er en relasjonell struktur. La L være nødvendighetsoperatoren over <X,R>. Definer en ny funksjon N: X–> Pt(Pt(X)) ved:
N(x) = Mg(y: yêPt(X) & xêL(y))
Da gjelder om xêX og a,bêPt(X):
(i) ø≠aêPt(Pt(X)) & a Inkl N(x) –> SN(a)êN(x)
(ii) aêN(x) & bêPt(X) & a Inkl b –> bêN(x)
(iii) XêN(x)
Er R seriell oppfyller også N det følgende krav for alle xêX:
(iv) ¬øêN(x)
Er R refleksiv oppfyller også N det følgende krav for alle xêX:
(v) aêN(x) –> xêa
Er R transitiv vil N være slik at for alle xêX:
(vi) aêN(x) –> Mg(y: aêN(y))êN(x)
Er R symmetrisk har man for alle xêX:
(vii) ¬(xêa) –> Mg(y: yêX &¬(aêN(y)))êN(x)
Er R evklidisk har man at for alle xêX:
(viii) ¬(aêN(x)) –> Mg(y: yêX &¬(aêN(y)))êN(x)

I §1 betegnet vi klassen av alle relasjonelle strukturer med "K". Klassen av de relasjonelle strukturene som var serielle ble betegnet med "KD" og tilsvarende for de andre kravene om refleksivitet, symmetri, transitivitet og evklidisitet. Klassen av f.eks. alle relasjonelle strukturer hvor alternativrelasjonen i strukturen er både refleksiv og symmetrisk ble betegnet med "KTB". Alle de strukturklassene som derfor er angitt i figuren i §1 er derfor delmengder av S. Som man ser fra teoremet ovenfor er det krav ved modalfunksjoner som svarer til disse kravene. Det kan være gunstig å ha navn på disse. Vi skal bruke de følgende forkortelser :

D' – (Ax)(xêX –> ¬(øêN(x))
T' – (Ax)(Aa)(aêPt(X) & xêX –> (aêN(x) –> xêa))
B' – (Ax)(Aa)(aêPt(X) & xêX –> (¬(xêa) –> Mg(y: yêX &¬(aêN(y)))êN(x)))
4' – (Ax)(Aa)(aêPt(X) & xêX –> (aêN(x) –> Mg(y: aêN(y))êN(x)))
5' – (Ax)(Aa)(aêPt(X) & xêX –> (¬(aêN(x)) –> Mg(y: yêX &¬(aêN(y)))êN(x)))

Som man ser svarer kravet D' til kravet om serialitet, T', B', 4' og 5' til henholdsvis kravene om refleksivitet, symmetri, transitivitet og evklidisitet i forbindelse med relasjonelle strukturer, mao. til kravene D, T, B, 4 og 5 som har blitt nevnt tidligere.

La oss betegne klassen av modalfunksjoner med M. Man ser da at det finnes i alt 2^5=32 forskjellige kombinasjoner av kravene ovenfor som man kan stille til en modalfunksjon. Til enhver slik kombinasjon av krav vil det svare en klasse av modalfunksjoner, nemlig klassen av dem som oppfyller kravene.

Fra teoremet ovenfor fremgår det nå at funksjonen F avbilder klassen av relasjonelle strukturer som er refleksive en-entydig inn i klassen av modalfunksjoner som oppfyller kravet T'. Det samme gjelder for enhver annen klasse av relasjonelle strukturer som oppfyller en eller annen kombinasjon av kravene D, T, B, 4 og 5. En slik klasse avbildes en-entydig inn i den tilsvarende klasse av modalfunksjoner. Man har f.eks. at F"(KT5) Inkl MT'5'. Teoremet viser imidlertid ikke at denne avbildningen avbilder en slik klasse av relasjonelle strukturer på den tilsvarende klassen av modalfunksjoner.

Bevis: (i) – (iii). Når det gjelder disse punktene ble de bevist ovenfor i forbindelse med argumentasjonen til fordel for Teorem 2.1.

(ii) Anta (1) aêN(x) & bêPt(X) & a Inkl b. Fra den første konjunkten og definisjonen av funksjonen N følger:

(2) aêPt(X) & xêL(a). Fra dette og definisjonen av L følger i sin tur:

(3) (Az)(zêX & xRz –> zêa) Men siden a Inkl b kan man herav slutte:

(4) (Az)(zêX & xRz –> zêb). Siden xêX følger i så fall ved hjelp av definisjonen av L at:

(5) xêL(b). I lys av forutsetningene er bêPt(X). Fra dette, (5) og definisjonen av N følger så det vi ønsker, nemlig bêN(x). Dette viser at (ii) holder.

(v) Er R en refleksiv relasjon har man at L(a)=>a er en tautologisk mengde. Nå er xê(L(a)=>a) hvis og bare hvis xêL(a) –> xêa. Men aêN(x) impliserer i lys av definisjonen av N at xêL(a). Det følger at aêN(x)–> xêa.

(vi) Vi har xê(L(a)=>LL(a)) <–> (xêL(a) –> xêLL(a)) I denne forbindelse bemerker vi at "x=>y" er definert som "(–x)Uy". Dette innebærer at zê(x=>y) hvis og bare hvis zê((–x)Uy). Da har vi ¬(zêx) v zêy. Dette impliserer så zêx –> zêy. Nå har man videre at xêLL(a) hvis og bare hvis (Az)(zêX & xRz –> zêL(a)). At dette holder innser man lett ved å studere definisjonen av L. I lys av defini-sjonen av N følger da at:

aêN(x) <–> aêPt(X) & xêL(a). Derfor har man:
xêLL(a) <–> (Az)(zêX & xRz –> zêMg(y: aêN(y)))
<–> xêL(Mg(y: aêN(y)))
<–> Mg(y: aêN(y))êN(x).

Det følger at:
xê[L(a)=>LL(a)] <–> (aêN(x) –> Mg(y: aêN(y))êN(x))

Men siden R er transistiv er L(a)=>LL(a) en tautologisk mengde. Fra dette og definisjonen av en tautologisk mengde følger:
aêN(x) –> Mg(y: aêN(y))êN(x)

(vii) Er <X,R> en relasjonell struktur hvor R er symmetrisk har man at a=>LP(a) er en tautologisk mengde. Nå er P(a)=–L(–a). Det følger at a=>L(–L(–a)) er tautologisk. Herav følger: xêa –> xêL(–L(–a)). Siden dette holder generelt for enhver mengde a, har man (1) xê(–a)–> xêL(–L(a)). Siden aêPt(X) følger ved hjelp av definisjonen av N at
¬(aêN(x)) <–> ¬(xêL(a)) <–> xê(–L(a))

Herav følger videre Mg(x: xêX &¬(aêN(x))) = –L(a). Fra disse to tingene, (1) og definisjonen av N følger så ¬(xêa) –> Mg(y: yêX &¬(aêN(y)))êN(x).

(viii) Er <X,R> en relasjonell struktur hvor R er evklidisk har man at P(a)=>LP(a) er en tautologisk mengde. Nå er P(a)=–L(–a). Det følger at –L(-a)=>L(–L(–a)) er tautologisk. Herav følger: xê–L(–a) –> xêL(–L(–a)). Siden dette holder generelt for enhver mengde a, har man (1) xê(–L(a)) –> xêL(–L(a)). Siden aêPt(X) følger ved hjelp av definisjonen av N at
¬(aêN(x)) <–> ¬(xêL(a)) <–> xê(–L(a))

Herav følger videre Mg(x: xêX &¬(aêN(x))) = –L(a). Fra disse to tingene, (1) og definisjonen av N følger så ¬(aêN(x)) –> Mg(y: yêX &¬(aêN(y)))êN(x).

Dette avslutter beviset for Teorem 2.2. **Q.E.D.**

Teorem 2.1 viser at det er mulig å konstruere en naturlig modalfunksjon gitt en relasjonell struktur <X,R>. Det følgende teorem viser at det omvendte er tilfelle. Gitt en modalfunksjon

<X,N> kan man på en naturlig måte konstruere en korresponderende relasjonell struktur <X,R> som er slik at

aêN(x) <–> (Ay)(xRy –> yêa) for alle aêPt(X) og xêX.

Dessuten viser teoremet nedenfor at hvis den relasjonelle strukturen <X,R> er konstruert fra modalstrukturen <X,N> på den måten som er vist i satsen så vil <X,R> oppfylle et eller flere av kravene D, T, B, 4, 5 hvis <X,N> oppfyller de korresponderende krav. Dette innebærer at funksjonen F som ble definert ovenfor ikke bare avbilder enhver av de klassene som ble fremstilt på figuren i §1 inn i den korresponderende klasse av modalfunksjoner, men også på denne.

Teorem 2.3 Anta X er en ikke-tom mengde og at N er en modalfunksjon over X. Definer en relasjon R over X ved å sette:

R= Mg(<x,y>: x,yêX & yêSN(N(x)))

Da gjelder følgende:

(i) <X,R> er en relasjonell struktur

(ii) (Ax)(Aa)(xêX & aêPt(X) –> (aêN(x) <–> (Ay)(xRy –> yêa)))

(iii) Gjelder (Ax)(xêX –> ¬(øêN(x)) har man:

(Ax)(xêX –> (Ey)(yêX & xRy))

(iv) Har man at (Aa)(Ax)(xêX & aêPt(X) –>(aêN(x)–>xêa)) gjelder at R er refleksiv over X, ie. (Ax)(xêX –> xRx)

(v) Har man at aêN(x) –> Mg(y: aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêX gjelder at R er en transitiv relasjon over X:

(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêX & xRy &yRz –> xRz)

(vi) Har man at ¬(xêa) –> Mg(y:yêX &¬(aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêX gjelder at R er symmetrisk over X:

(Ax)(Ay)(x,yêX & xRy –> yRx)

(vii) Har man at ¬(aêN(x)) –> Mg(y:yêX &¬(aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêX gjelder at R er evklidisk over X:

(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêX & xRy &xRz –> yRz)

Bevis: (i) Fra definisjonen av R samt definisjonen av relasjonell struktur følger det umiddelbart at <X,R> er en relasjonell struktur. Det første punktet i teoremet holder derfor trivielt.

(ii) Anta xêX & aêPt(X) for vilkårlige entiteter a,x. Anta videre at aêN(x), og at xRy, for å vise at man i så fall må ha yêa. Siden xRy følger ved hjelp av definisjonen av R at (1) yêSN(N(x)). Fra dette følger i lys av definisjonen av snitt at (Ab)(bêN(x) –> yêb). Men aêN(x). Derfor yêa. Dette viser at den ene halvdelen av (ii) holder.

Anta på den annen side at xêX & aêPt(X) og at (Ay)(xRy –> yêa) for å vise at aêN(x). Fra dette og definisjonen av R følger: (2) (Ay)(yêSN(N(x)) –>yêa). Nå har vi fra definisjonen av en modalfunksjon N at XêN(x) og derfor at (3) N(x)≠ø. Videre har vi åpenbart at N(x) Inkl N(x). Det følger derfor ved hjelp av Definisjon 2 at (4) SN(N(x))êN(x). Men (2) impliserer SN(N(x)) Inkl a. Fra dette, (4), det at aêPt(X) og Definisjon 2, følger at aêN(x).

(iii) Anta (5) (Ax)(xêX –> ¬(øêN(x)) og at xêX for vilkårlig x. Det vil være tilstrekkelig å bevise at (Ey)(yêX & yêSN(N(x)). Fra dette og definisjonen av R følger påstanden. Anta mot formodning at det ikke finnes noe y der yêX og der yêSN(N(x)). Dette innebærer at det ikke finnes noe yêX der (Aa)(aêN(x) –> yêa). Dette vil si at (6) (Ay)(yêX –> (Ea)(aêN(x) & ¬(yêa))). Det er to muligheter når det gjelder X. (a) X inneholder kun ett element. Da har man X={z} for noe z. Dette og (6) innebærer at det må finnes noe aêN(x) der ¬(zêa), Men N(x)êPt(Pt(X)) og da må a Inkl {z}. Det følger at a=ø. Men i så fall er øêN(x) og dette strider mot (5). Dette tilfellet er derfor utelukket. (b) X inneholder minst to elementer z1 og z2. I lys av (6) og utvalgsaksiomet finnes det da en funksjon F som til hver yêX tilordner en mengde F(y) hvor F(y)êN(x) & ¬(yêF(y)). Sett Q=SN/yêX/(F(y)). Fra definisjonen av en modalfunksjon følger at QêN(x). Anta zêQ for noe z. Da har vi zêX og derfor ¬(zêF(z)). Men (Ay)(yêQ –> yêF(y)). Det følger at Q=ø. Men da er øêN(x). Dette strider mot (5). Begge tilfelle er derfor utelukket.

Det følger at det må finnes y der yêX & yêSN(N(x)). Men dette innebærer at xRy i lys av definisjonen av R.

(iv) Anta (7) (Aa)(Ax)(xêX & aêPt(X) –>(aêN(x)–>xêa)) og at xêX for vilkårlig x. Vi ønsker da å vise at xRx, dvs. i lys av definisjonen av R at xêSN(N(x)). Men fra (7) følger direkte ved hjelp av definisjonen av "SN", snitt, at xêSN(N(x)).

(v) Anta (8) aêN(x) –> Mg(y: aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêX. For å vise at R er transitiv anta (9) yêSN(N(x)) og at (10) zêSN(N(y)) for vilkårlige elementer x,y og z i X. Vi ønsker vise at zêSN(N(x)). Fra (9) følger (11) (Aa)(aêN(x) –> yêa). Tilsvarende følger fra (10): (Ab)(bêN(y) –> zêb). Anta nå for vilkårlig c at cêN(x). Fra dette og (8) følger Mg(y: yêX & cêN(y))êN(x). Fra dette og (11) følger cêN(y). Herav har vi ved hjelp av det at (Ab)(bêN(y) –> zêb) at zêc. Siden c var vilkårlig har vi nå vist: (Ac)(cêN(x) –> zêc). Fra dette og definisjonen av snitt kan man slutte at zêSN(N(x)) som er det vi ønsker.

(vi) Anta (12) ¬(xêa) –> Mg(y:yêX &¬(aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêX. Vi ønsker da å vise at R er symmetrisk. Anta derfor at xRy for vilkårlige objekter x og y. Fra dette og definisjonen av R følger yêSN(N(x)). Dette inne-bærer at (13) (Aa)(aêN(x) –> yêa). For å vise at yRx vil det i lys av definisjonen av R være tilstrekkelig å bevise (Aa)(aêN(y) –> xêa). Anta mot formodning at det finnes c der (14) cêPt(X) & cêN(y) & ¬(xêc). Fra dette og (12) kan man da slutte: (15) Mg(y: yêX &¬(cêN(y))êN(x) Fra (14) og (13) følger ¬(cêN(y)). Dette strider imidlertid mot (14). Det følger at det ikke kan finnes c der cêN(y) & ¬(xêc). Det følger at (Ac)(cêN(y) –> xêy).

(vi) Anta (16) ¬(aêN(x)) –> Mg(y: yêX &¬(aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêX. Vi ønsker da å vise at R er evklidisk. Anta derfor at xRy &xRz for vilkårlige objekter x og y. Fra dette og definisjonen av R følger yêSN(N(x)) og dessuten at zêSN(N(x)). Dette innebærer at

(17) (Aa)(aêN(x) –> yêa)
(18) (Aa)(aêN(x)–> zêa)

For å vise at yRz vil det i lys av definisjonen av R være tilstrekkelig å bevise (Aa)(aêN(y) –> zêa). Anta mot formodning at det finnes c der (+) cêPt(X) & cêN(y) & ¬(zêc). Fra dette og (18) kan man da slutte: (19) ¬(cêN(x)). Men fra dette og (16) følger:

(20) Mg(y: yêX &¬(cêN(y))êN(x)

Fra (17) og (20) følger ¬(cêN(y)). Dette strider imidlertid mot (+). Det følger at det ikke kan finnes c der cêN(y) & ¬(zêc). Det følger at (Ac)(cêN(y) –> zêy)

Dette avslutter beviset for Teorem 2.3. **Q.E.D.**

Hevder man at det er logisk nødvendig at en påstand holder synes dette å innebære at påstanden holder i enhver logisk mulig verden. Det omvendte virker også rimelig. Er en påstand sann i enhver logisk mulig verden er den også nødvendig sann.

Teorem 2.4 La X være en ikke-tom mengde. Definer en funksjon Δ: X–> Pt(Pt(X)) ved: Δ(x)= Mg(y: X Inkl y). Da har man at Δ er en modalfunksjon som oppfyller de følgende krav for alle aêPt(X) og xêX:

(i) (Ax)(xêX –> ¬(øêΔ(x))
(ii) aêΔ(x)–>xêa
(iii) aêΔ(x) –> Mg(y: aêΔ(y))êΔ(x)
(iv) ¬(xêa) –> Mg(y:yêX &¬(aêΔ(y))êΔ(x)

Teorem 2.5 La X være en ikke-tom mengde. La videre A være en ikke-tom mengde og anta at f: A–>P(X) er en funksjon som oppfyller de følgende krav:

(i) Er x,yêA & x≠y –> f(x)Ωf(y)=ø
(ii) Er xêA så er f(x)≠ø
(iii) X=UN(Mg(f(x): xêA))

Dette innebærer at f representerer en partisjon av X i innbyrdes disjunkte og ikke-tomme mengder.

Definer en funksjon F: X –> Pt(Pt(X)) ved å sette:

F=Mg(<x,y>: (Ez)(zêA & y= Mg(q: qêPt(X) &f(z) Inkl q) &xêf(z)))

Under disse omstendigheter har vi at F er en modalfunksjon over X som oppfyller de følgende krav:

(i) (Ax)(xêX –> ¬(øêF(x))
(ii) aêF(x)–>xêa
(iii) aêF(x) –> Mg(y: aêF(y))êF(x)
(iv) ¬(xêa) –> Mg(y:yêX &¬(aêF(y))êF(x)

La oss avslutte denne paragrafen med et teorem som gir en alternativ karakteristisk av operatoren P. Teoremet er dette:

Teorem 2.6. Anta <X,R> er en relasjonell struktur. Anta aêPt(X) og at wêI. Da har man at:

wê(–L(–a)) <–> aΩSN(Mg(a: wêI &(Aw')(wRw' –> w'êa)))≠ø

Bevis: Vi har:

(+) wê–L(–a) <–> ¬(wêL(–a)) <–> (Ew')(wRw'&w'êa) Anta wêSN(Mg(a: wêI &(Aw')(wRw' –> w'êa))). Da ha man:

(Aa)(wêI &(Aw')(wRw' –> w'êa)). –> wêa)

Setter man b;w=Mg(w': wRw') følger at wêb;w. Det følger fra dette at:

SN(Mg(a: wêI &(Aw')(wRw' –> w'êa))) Inkl b;w

Anta på den annen side at xêb;w for vilkårlig x. Da har man (1) wRx. Anta nå for vilkårlig a at wêI &(Aw')(wRw' –> w'êa). Fra dette og (1) følger xêa. Man må derfor ha at:

(Aa)(wêI &(Aw')(wRw' –> w'êa)). –> xêa)

Dette viser at vi også har:

SN(Mg(a: wêI &(Aw')(wRw' –> w'êa))) = b;w

Fra dette og (+) følger at wê(–L(–a)) <–> (Ew')(w'êa&w'êb;w)
<–> aΩSN(Mg(a: wêI &(Aw')(wRw' –> w'êa)))≠ø Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Siden SN(Mg(a: wêI &(Aw')(wRw' –> w'êa))) er snittet av alle de utsagn som er nødvendig sanne relativt til w ser man at wê(–L(–a)) innebærer at a er logisk sett konsistent med snittet av alle de utsagn som er logisk nødvendige relativt til w. Mao. er man berettiget i å uttrykke wê(–L(–a))

§2.1 Vedrørende forholdet mellom T1 og setnings-modallogikker.

Så langt har vi ikke eksplisitt sett på modallogikker i den mer vanlige betydning av dette ord. La L;m være språket for modallogikk. Dette vil da ha et vokabular som (i) består av en tellbart uendelig mengde med setningsbokstaver. La oss betegne dem med med "p1", "p2", "p3",... etc. Videre vil språket inneholde de følgende logiske konnektiver: (ii) De setningslogiske konnektivene "¬","v", "&", "–>" og "<–>", samt to monadiske modaloperatorer "N" og "M" som representerer henholdsvis logisk nødvendighet og logisk mulighet. De velformede formlene i språket for modallogikk vil være dannet på vanlig måte, nemlig som den minste mengden av uttrykk som oppfyller de følgende krav:

(a) Enhver setningsbokstav er en velformet formel.
(b) Er F;1 og F;2 velformede formler er også (¬F;1), (F;1vF;2), (F;1&F;2), (F;1–> F;2), (F;1 <–> F;2) samt N(F;1) og M(F;1) velformede formler.

På grunnlag av denne definisjonen ser man lett at f.eks. "p1 –>L(p1)" er en velformet formel. Videre ser man lett at hvis F er en eller annen velformet formel så er også N(F)–>F, eller N(F) –> N(N(F)) velformede formler i L;m.

§2.2 Kripke-modeller for språket L;m.

Med en verditilordning for L;m over en relasjonell struktur <X,R> forstås en funksjon som til enhver setningsbokstav tilordner en mengde som er med i Pt(X). Med en modell for L;m forstår vi et trippel <V,X,R>, der V er en verditilordning for L;m over <X,R> og hvor <X,R> er en relasjonell struktur i den betydning vi tidligere har forklart. La det være klart at det som her kalles en modell for L;m er det samme som det som ofte kalles en Kripke-modell. La F være en vilkårlig formel i L;m, anta videre at V er en verditilordning for L;m og at <X,R> er en relasjonell struktur. Uttrykket "F er sann i verdenen w relativt til strukturen <X,R> og verditilordningen V", som vi ved hjelp av symboler forkorter med "True(F,w, <X,R>,V)", er da definert induktivt på lengden av formlene i L på den følgende måte:

(i) Er pk en setningsbokstav i L;m har man at:
True(pk,w, <X,R>,V) <–> wêV(pk)
(ii) Er F= (G&H) har man:
True(G&H ,w, <X,R>,V) <–>
(True(G,w, <X,R>,V) & True(H,w, <X,R>,V))
(iii) Er F= (G–>H) har man:
True(G–>H ,w, <X,R>,V) <–>
(True(G,w, <X,R>,V) –> True(H,w, <X,R>,V))
(iv) Er F= (GvH) har man:
True(GvH ,w, <X,R>,V) <–>
(True(G,w, <X,R>,V) v True(H,w, <X,R>,V))
(v) Er F= (G<–>H) har man:
True(G<–>H ,w, <X,R>,V) <–>
(True(G,w, <X,R>,V) <–> True(H,w, <X,R>,V))

(vi) Er F= ¬G har man:
True(¬G ,w, <X,R>,V) <–> ¬True(G,x,<X,R>,V)
(vii) Er F= N(G) har man:
True(G ,w, <X,R>,V) <–>
(Aw')(w'êX&wRw'.–> True(G,w',<X,R>,V))
(viii) Er F= M(G) har man:
True(M(G) ,w, <X,R>,V) <–>
(Ew')(w'êX& wRw' &True(G,w', <X,R>,V))
Dette avslutter definisjonen.

Ved hjelp av denne definisjonen av sannhet til en formel i en mulig verden w relativt til en relasjonell struktur <X,R> og en verditilordning V, kan man nå også definere hva som menes med at en formel i L;m er gyldig og hva som menes med at den er gyldig i en relasjonell struktur <X,R>.

En formel F er gyldig hvis og bare hvis man har for enhver modell <V,X,R>, og enhver x der xêX, at True(F,x,<X,R>,V>).

En formel F sies å være sann i en modell <V,X,R> hvis og bare hvis den er sann i alle verdener i modellen, mao. hvis og bare hvis man har:

(Ax)(xêX –> True(F,x,<X,R>,V))

Er K en klasse med modeller og F en formel, sies F å være gyldig i klassen K hvis og bare hvis F er sann i alle de modeller som er med i K. Vi skal bruke uttrykket "Val(M,F)" som forkortelse for "F er sann i modellen M". Imidlertid skal vi også tillate oss å skrive "Val(F,K)" når K er en klasse av modeller. I så fall betyr dette at F er sann i alle modellene i klassen K.

En formel F er gyldig i den relasjonelle strukturen <X,R> hvis og bare hvis man har for enhver verditilordning V og ethvert element xêX at True(F,x,<X,R>,V>). Er J en klasse med relasjonelle strukturer sier vi at en formel F er gyldig i klassen J hvis og bare hvis F er gyldig i enhver relasjonell struktur som er med i klassen J.

Fra disse definisjonene følger det at en formel er gyldig hvis og bare hvis den er gyldig i enhver relasjonell struktur.

§2.3 Modallogikker og fullstendighetsresultater.

Med en modallogikk forstås en mengde med formler Δ i L;m som (i) inneholder alle rent setningslogisk gyldige formler, og alle substitusjonsinstanser av dem, og som (ii) er lukket under setningslogisk konsekvens, dvs. at dersom F;1,.....,F;nêΔ og F er en setningslogisk konsekvens av F;1,...,F;n, så er også F med i Δ. At F er en setningslogisk konsekvens av formlene F;1,...,F;n betyr at

F;1 &....& F;n. –> F

er en setningslogisk gyldig formel. Den minste modallogikken er den minste formelmengden Δ som oppfyller kravene (i) og (ii).

Med et normalt system forstår vi en modallogikk i L;m som inneholder alle instanser av skjemaet M(F) <–> ¬N(¬F) og som dessuten er lukket under slutningsreglen:

Dersom (F;1& ..... &F;n –>F) er et teorem er også
N(F;1)& ... & N(F;n) –> N(F) et teorem

der n≥0. Det minste normale systemet betegnes med "K". I det følgende betegner vi de følgende skjemaer i L;m med henholdsvis "D","T","B","4" og "5":

(i) N(F) –> M(F)
(ii) N(F) –> F
(iii) F –> N(M(F))
(iv) N(F) –> N(N(F))
(v) M(F) –> N(M(F))

Er S;1....S;n en kombinasjon av disse skjemaene betegner "KS;1...S;n" det minste normale systemet som inneholder alle instanser av skjemaene S;1...S;n. Man ser at det er i alt 5^2 mulige kombinasjoner av skjemaene (i) –(v). Det vil derfor være 32 mulige normale systemer som man kan få ved å legge til forskjellige kombinasjoner av (i) – (v) til systemet K. Av disse 32 systemene er det bare 15 som er distinkte. Disse femten systemene korresponderer med de tilsvarende klassene av relasjonelle strukturer som ble fremstilt i figuren i §1. Faktisk har man at den følgende sats holder:

Teorem 2.3.1 Anta S;1...S;n er en sekvens av tegnene "D","T", "B", "4" og "5". Da har man at en formel F er et teorem i det normale systemet KS;1...S;n hvis og bare hvis F er gyldig i nøyaktig de og bare de relasjonelle strukturene som inngår i klassen K*S;1...S,n.

Det vil ikke bli gitt noe detaljert bevis for denne satsen her. Man kan imidlertid konsultere Chellas [1] om man ønsker detaljerte bevis for de enkelte punkter.

§2.4 Om samsvaret mellom konnektivene i L:m og boolske operasjoner.

Det er noen sammenhenger mellom modallogikker og relasjonelle strukturer, og da tenker vi også på den naturlige relasjonelle strukturen, som bør komme klart frem. Anta F er en formel i L;m og at M= <V,X,R> er en modell for L;m. Med sannhetsmengden til formelen F i modellen M=<V,X,R> forstås mengden av alle de xêX som er slik at F er sann ved punktet x i strukturen <X,R> relativt til verditilordningen V, mao. klassen av alle de xêX der man har True(F,x, <X,R>,V). Vi betegner sannhetsmengden til F i modellen M med "sm(F,M)". For å nevne et eksempel har man at hvis F;1og F;2 er to formler i L;m der F;1–> F;2 er sann i modellen M, så vil naturligvis sannhetsmengden til F;1 i M være inkludert i sannhetsmengden til F;2 i M. I lys av valuajonsreglene i definisjonen av en modell for L;m har man at den følgende påstand holder:

(1) Anta M=<V,X,R> er en modell for L;m og at F;1,F;2 er to formler i L;m. Da gjelder følgende:

(a) sm(pk) = V(pk) om pk er en setningsbokstav i L;m.
(b) sm(F;1&F;2,M) = sm(F;1,M)Ω sm(F;2,M)
(c) sm(F;1vF;2,M) = sm(F;1,M)U sm(F;2,M)
(d) sm(F;1–>F;2,M) = sm(F;1,M) => sm(F;2,M)
(e) sm(F;1&F;2,M) = sm(F;1,M) <=> sm(F;2,M)
(f) sm(¬F;1,M) = X– sm(F;2,M)
(g) sm(N(F;1),M) = L(sm(F,M))
(h) sm(M(F;1), M) = P(sm(F,M))

Man ser fra dette at det er en nokså åpenbar korrespondanse mellom konnek-tivene i L;m og de tilsvarende mengdeteoretiske operasjoner som ble innført i forbindelse med den generelle teorien om relasjonelle strukturer. Konnektivene ¬, &, v, –>, <–>, N og M svarer til henholdsvis operasjonene komplement, snitt, union, =>, <=>, L og P. Dette fremgår forsåvidt helt klart fra (1) ovenfor.

Det kan være av interesse å utdype denne korrespondansen noe mer. I det følgende betegner "L;e(Δ)" språket til teorien T1. L;m er språket for setningslogikk som vi definerte ovenfor. Er L et eller annet språk skal vi la "Fm(L)" stå for mengden av alle formler i L.

Det vi nå ønsker er å spesifisere et knippe av funksjoner £;(X,R), hvor X og R er visse variabeltegn i L;e(Δ), som avbilder formlene i L;m på uttrykk i L;e(Δ). For dette formål tenker vi oss at vi blant variabeltegnene i L;e(Δ) har valgt ut en uendelig rekke a;1,.....,a;n,.... , men på en slik måte at det blir uendelig mange tilbake. Videre tenker vi oss nå at X og R er to andre vilkårlig valgte variabeltegn i L;e(Δ) som ikke er blant a;i'ene.

Vi definerer induktivt avbildningen £(X,R), hvor domenet er L;m, ved de følgende punkter:

(i) £;(X,R)(p;k) = a;k om p;k er en setningsbokstav i L;m
(ii) £;(X,R)(F;1&F;2) = £;(X,R)(F;1) Ω £;(X,R)(F;2)
(iii) £;(X,R)(F;1vF;2) = £;(X,R)(F;1) U £;(X,R)(F;2)
(iv) £;(X,R)(F;1–>F;2) = £;(X,R)(F;1) => £;(X,R)(F;2)
(v) £;(X,R)(F;1<–>F;2) = £;(X,R)(F;1) <=> £;(X,R)(F;2)
(vi) £;(X,R)(¬F;1) = X–£;(X,R)(F;1)
(vii) £;(X,R)(N(F;1)) = L(£;(X,R)(F;1))
(viii) £;(X,R)(M(F;1)) = P(£;(X,R)(F;1))

Er F en formel i L;m vil £;(X,R)(F) være et uttrykk i L;e(Δ) hvor (i) de fri variablene som forekommer er de av variabeltegnene a;1,...,a;n,... som svarer til de enkelte setningsbokstavene som forekommer i F, og som (ii) eventuelt, i tillegg, inneholder X og R som fri variabler om formlen F inneholder noen av konnektivene ¬, M eller N.

La b;1...b;n være nøyaktig de av variablene i £;(X,R)(F) som er blant a;i'ene. Da lar vi £*;(X,R)(F) være formelen:

(Ab;1)...(Ab;n)(b;1êPt(X) &...&b;nêPt(X). –> £;(X,R)(F) = X)

Man ser fra konstruksjonen av £*;(X,R)(F) at denne formelen i høyden bare kan inneholde X og R som fri variabler.

Uttrykket "<X,R> er en relasjonell struktur" kan formaliseres i L;e, og derfor i L;e(Δ), som en åpen setning som bare inneholder X og R som fri variabler. La oss akkurat i denne paragrafen betegne denne åpne setningen med "∂(X,R)". Er derfor F en formel i L;m vil:

(AX)(AR)(∂(X,R) –> £*;(X,R)(F))

være en lukket formel i L;e(Δ). Faktisk vil det være en formel i den rent mengdeteoretiske delen av språket L;e(Δ). Vi betegner denne formelen med "g(F)". Studerer man denne konstruksjonen litt nærmere ser man at man effektivt kan konstruere g(F) gitt en vilkårlig formel F i L;m.

Man kan nå gi bevis for den følgende sats:

Teorem 2.4.1 Er F en formel i L;m har man at F er et teorem i K hvis og bare hvis g(F) holder.

Vi skal gi et bevis for Teorem 2.4.1. For dette formål finner vi det hensiktsmessig å bevise den følgende hjelpesetningen først:

Lemma 2.4.1 Anta <X,R,V> er en modell for L;m, at F er en formel i L;m og at V(pk) = a;k der a;k er blant variabeltegnene i rekken a;1,...,a;n,.... som ble nevnt i definisjonen av transformasjonen £. Anta x er et vilkårlig element i X og at x ikke er blant variablene a;1,...,a;n,.. Da har man:
True(F,x,<X,R>,V) hvis og bare hvis xê£;(X,R)(F)

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på lengden av F.

(i) Er F=pk har man at True(pk,x,<X,R>,V) hvis og bare hvis xêV(pk) Men dette siste holder i lys av forutsetningene i teoremet og definisjonen av £ hvis og bare hvis xê£;(X,R)(pk). Dette viser at satsen holder i dette tilfellet.

(ii) Er F=F;1&F;2 har man:
(1) True(F;1&F;2,x, <X,R>,V) <–>
(True(F;1,x, <X,R>,V) & True(F;2,x, <X,R>,V))
I lys av induksjonshypotesen har man videre:
True(F;1,x,<X,R>,V) hvis og bare xê£;(X,R)(F;1) og
True(F;2,x,<X,R>,V) hvis og bare xê£;(X,R)(F;2)
Fra dette og (1) følger at:
True(F;1&F;2,x, <X,R>,V) <–> xê£;(X,R)(F;1) &xê£;(X,R)(F;1)
<–> xê£;(X,R)(F;1&F;2).
Satsen holder derfor også i dette tilfellet.

(iii) Er F=(F;1–> F;2), (F;1vF;2) eller F;1<–>F;2 bevises satsen på samme måte som under tilfelle (ii)

(iv) Anta F=(¬F;1). Da har man:
True(¬F;1,x, <X,R>,V) <–> ¬True(F;1,x,<X,R>,V). Ved hjelp av induksjonshypotesen har man da at:
True(¬F;1,x, <X,R>,V) <–> ¬(xê£;(X,R)(F;1))
<–> xê(X – £;(X,R)(F;1)) <–> xê£;(X,R)(¬F;1)
Den siste ekvivalensen holder fordi det at xêX er en av forutsetningene i satsen.

(v) Anta F=N(F;1). Da har man:
True(N(F;1),x, <X,R>,V) <–> (Aw')(w'êX&xRw'.–> True(F;1,w',<X,R>,V))
Ved hjelp av induksjonshypotesen har man da, i det vi kan forutsette at w' er distinkt fra de diverse a;i'ene, at:
True(N(F;1),x, <X,R>,V) <–> (Aw')(w'êX&xRw'.–> w'ê£;(X,R)(F;1))
<–> xêL(£;(X,R)(F;1)) <–> xê£;(X,R)(N(F;1))
Dette viser at satsen holder i dette tilfellet..

(vi) Er F=M(F;1) går man frem på en måte som er helt analog med den som er vist under punkt (v). Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

Den følgende hjelpesetning følger umiddelbart fra Lemma 2.4.1 ved instansiering:

Lemma 2.4.2 Anta F er en formel i L;m. Anta videre at <X,R,V> er en modell for L;m, og at D er den formelen vi får når vi setter inn V(q;r) for b;r i £;(X,R)(F) (r=1...n) Anta x er et vilkårlig element i X og at x ikke er blant variablene a;1,...,a;n,.. Da har man:
True(F,x,<X,R>,V) hvis og bare hvis xêD

Ved hjelp av disse to hjelpesetningen kan man nå vise den følgende sats:

Teorem 2.4.2 Er F en formel i L;m har man at F er gyldig hvis og bare hvis g(F)

Bevis: (a) Anta F er en formel i L;m og at F er gyldig. Det siste impliserer at F er gyldig i enhver relasjonell struktur <X,R>. Vi må vise at g(F) holder. Anta derfor for vilkårlige X,R at ∂(X,R), dvs. at <X,R> er en relasjonell struktur. Da har vi siden F er gyldig at (1) (Ax)(xêX –> True(F,x,<X,R>,V)) for enhver verdi-tilordning V over <X,R>. Anta nå at b;1,...,b;nêPt(X) for vilkårlige b;1,...,b;n. Det må finnes en verditilordning V som er slik at V(q;r) = b;r for r=1...n og hvor de diverse q;r her er de setningsbokstavene i L;m som svarer til variabeltegnene b;1...b;n. Men fra dette, (1) og Lemma 2.4.2 følger at:

(Ax)(xêX –> xê£;(X,R)(F)) dvs. £;(X,R)=X.

Vi har derfor: (Ab;1)...(Ab;n)(b;1êPt(X) &...b;nêPt(X). –> £;(X,R)(F) = X). Men siden vi antok ∂(X,R) for vilkårlige X,R følger:

(AX)(AR)(∂(X,R) –> £*;(X,R)(F)), med andre ord at g(F). Dette viser at kondisjonalen mot høyre i teoremet holder.

(b) Anta på den annen side at g(F). Dette innebærer at for alle relasjonelle strukturer <X,R> har man:

(1) (Ab;1)...(Ab;n)(b;1êPt(X) &...b;nêPt(X). –> £;(X,R)(F) = X)

Anta nå at <V,X,R> er en vilkårlig modell for L;m. Da har man for de setningsbokstaver som inngår i F, la oss anta at det er q;1,..,q;n at det finnes x;1,...,x;n slik at (2) V(q;r)=x;rêPt(X) (r=1...n). Fra dette og (1) følger D=X, der D er definert som i Lemma 2.4.2. Men herav og ved hjelp av Lemma 2.4.2 følger i sin tur at (Ax)(xêX –> True(F,x,<X,R>,V)). Man har altså at F er gyldig. Dette avslutter beviset. **Q.E.D.**

Det er nå ikke vanskelig å vise at Teorem 2.4.1 holder. Anta F er en formel i L;m. I lys av fullstendighetsteoremet Teorem 2.3.1 har man at F er et teorem i K hvis og bare hvis F er gyldig. Men dette holder i lys av Teorem 2.4.2 hvis og bare hvis g(F).

§2.5 Oppsummering

La oss nå oppsummere resultatene så langt når det gjelder relajonelle strukturer og modalfunksjoner. Det som har blitt bevist er at det er mulig å avbilde klassen av relasjonelle strukturer en-entydig på klassen av modalfunksjoner på en naturlig måte. Vi definerte nemlig en funksjon F ved å sette at F(s) er den modalfunksjonen <X,N> hvor N =Mg(<w,Mg(a:(Ay)(yêX & xRy –>yêa))>: wêI) forutsatt at s=<X,R> er en relasjonell struktur. Det som så ble vist var at denne funksjonen var en-entydig og på mengden av modalfunksjoner. For hver mulig kombinasjon av kravene D, T, B, 4 og 5 viste vi så at F avbildet klassen av de relasjonelle strukturene som oppfylte denne kombinasjonen av krav på mengden av modalfunksjoner som oppfylte den tilsvarende kombinasjonen av kravene D*, T*, B*, 4* og 5*. Det fremgår fra dette at F ikke er en hvilken som helst korrelasjon mellom de to klassene av strukturer, men en genuin strukturbevarende avbildning.

I tillegg til dette resultat har vi også bevist en rekke satser som gjelder for mulighets- og nødvendighetsoperatoren i en relasjonell struktur generelt og for forskjellige klasser av modalfunksjoner. Tilsvarende satser vil også gjelde for de korresponderende mengder av modalfunksjoner. Det ble nevnt at de rela-sjonelle strukturer svarte til det som ble kalt den relasjonelle teorien om logisk nødvendighet. Modalfunksjonene svarer til utsagnsteorien om logisk nødvendighet. Teoriene ble presist definert i §0. Resultatene om funksjonen F viser at de to teoriene i det vesentlige er ekvivalente. Videre gir de satser som vi viste at holder generelt for relasjonelle strukturer en et mer fyldig bilde av hva som faktisk kan utledes av teoremer i henholdsvis den relasjonelle teorien om logisk nødvendighet og i utsagnsteorien om logisk nødvendighet. Selv om man ikke kan si at svært mye nytt har blitt bevist i §1–2, og til tross for at de enkelte teoremer ikke er spesielt vanskelige å bevise, er dette etter vår mening helt vesentlig om man er ute etter å få et grundig og ikke-overfladisk innblikk i hva teorien T1 egentlig sier. Fra det som det har blitt gjort rede for i paragrafene §2.1 – 2.4 fremgår det også at vi har vist hvordan det vanlige studium av setnings-modallogikk er relatert til vårt studium av teorien T1 og beslektede teorier.

§3 Begrensede modalfunksjoner

I denne paragrafen skal vi introdusere en type struktur som er svært nært beslektet med det vi i forrige paragraf kallte for modalfunksjoner. Denne type strukturer er de *begrensede modalfunksjoner*. Klassen av de begrensede modalfunksjoner omfatter klassen av modalfunksjoner som et spesialtilfelle og kan derfor oppfattes som en generalisering av det sistnevnte begrep. Vi gir den følgende definisjon:

Definisjon 3.1 (a) En *begrenset modalfunksjon* er et ordnet par <X,N> der X er en ikke-tom mengde og hvor N : X –> Pt(Pt(X).
(b) Er <X,N> en begrenset modalfunksjon, og xêX, kalles *x for et normalt punkt i X* hvis og bare hvis x oppfyller de følgende krav for alle a,bêPt(X) og cêPt(Pt(X):

(i) ø≠c Inkl N(x) –> SN(c)êN(x)
(ii) aêN(x) & bêPt(X) & a Inkl b –> bêN(x)
(iii) XêN(x)

(c) Er <X,N> en begrenset modalfunksjon betegnes mengden av de normale punktene i X med "q".

Som man ser fra denne definisjonen er klassen av modalfunksjoner identisk med den delmengden av begrensede modalfunksjoner <X,N> der klassen av de normale punktene, q, er identisk med X.

I forbindelse med begrensede modalfunksjoner innfører vi de følgende begreper. Med *nødvendighetsoperatoren* over en begrenset modalfunksjon <X,N> menes operatoren L: Pt(X) –> Pt(X) som er definert ved: L(a)=Mg(x: aêN(x)) der aêPt(X). *Mulighetsoperatoren* P over en begrenset modalfunksjon <X,N> er definert ved hjelp av nødvendighetsoperatoren L på den følgende måte: P(a)= –N(–a) der aêPt(X). "–a" betegner her komplementet til mengden a med hensyn på X. Er nêNat defineres operasjonen L/n/: Pt(X) –> Pt(X) induktivt ved:

(i) L/0/(a) = a
(ii) L/n+1/(a)= L(L/n/(a))

Tilsvarende defineres operatoren P/n/: Pt(X) –> Pt(X) der nêN induktivt ved:

(i) P/0/(a) =a
(ii) P/n+1/(a) = P(P/n/(a))

Teorem 3.1 Anta <X,N> er en begrenset modalfunksjon. Anta q er de normale punktene i <X,N> og at ø≠h Inkl q. Anta a,b,c êPt(X) og at n,kêNat. Da gjelder:

(i) L/n/(a) <=> –P/n/(–a)
(ii) L/2/(a) <=> –P/2/(–a)
(iii) Er a=>b en tautologisk mengde har man, om k≥0, at også

SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(a) => L/k+1/(b)) er en tautologisk mengde

(iv) Er a=>b en tautologisk mengde har man, om k≥0, at også
SN/n,0,∞/(L/n/(h)) => (L/k+1/(a) => L/k+1/(b)) er en tautologisk mengde

(v) Er a;1,....,a;r,bêPt(X) & r≥1, og er a;1**Ω**...**Ω**a;n => b en tautologisk mengde gjelder for alle k≥0 at følgende mengde er tautologisk:
SN/n,0,k/(L/n/(h)) =>
(L/k+1/(a;1)Ω...ΩL/k+1/(a;n) => L/k+1/(b))

(vi) Er aΩb => c en tautologisk mengde og k≥0 gjelder at
SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(a)**Ω**.L/k+1/(b) => L/k+1/(c)) er en tautologisk mengde

(vii) Er a <=> b en tautologisk mengde er også L/n/(a) <=> L/n/(b) en tautologisk mengde.

(viii) Er n≥0 gjelder at SN/n,0,k/(L/n/(h)) => L/k+1/(X) er tautologisk.

Bevis: Ad (i). Anta forutsetningene i satsen holder. Påstanden bevises ved induksjon på n. I det tilfelle at n=1 har man at:
xêL(a) <–> xê—L(–(–a)) <–> xê–P(–a) i lys av definisjonen av operasjonen P. Dette viser at påstanden holder om n=1. Er n=0 ser man at man trivielt har at L/0/(a) = a = –(–a) = –P/0/(–a) siden P/0/–a) per definisjon er –a.

Anta satsen holder for n≥0 for å vise at den da holder for n+1. Man har:

(1) xêL/n+1/(a) <–> xêL(L/n/(a)) <–> xê– –L(– –L/n/(a))
<–> xê–P(–L/n/(a))

Siden vi etter induksjonshypotesen har at L/n/(a) <=> –P/n/(–a) er tautologisk innebærer dette at L/n/(a) = –P/n/(–a). Fra dette og (1) har man:

(2) xêL/n+1/(a) <–> xê–P(–(–P/n/(–a))) <–> –P(P/n/(–a))
<–> –P/n+1/(–a)

I lys av definisjonen av P/n+1/ og det forhold at —P/n/(–a) = P/n/(–a). Dette viser at den første påstanden i satsen holder.

Ad (ii). Denne klausulen følger fra punkt (i) ved å sette n=2.

Ad (iii). Denne påstanden bevises ved induksjon på k. Vi viser først at den holder om k=0. Anta a=>b er tautologisk. Dette innebærer at
(Ax)(xêa –> xêb) og derfor at (1) a Inkl b. Anta nå xêL/1/(a) &xêh. Da har vi per definisjon av L/a/ at xêL(a) og derfor at (2) xêq & aêN(x). Fra (2) følger at x er et normalt punkt i X. Dette, (1) og (2) impliserer at bêN(x) ie. at xêL/1/(a). Siden x var vilkårlig har vi nå vist:
(Ax)(xêh –>(xêL/1/(a) –> xêL/1/(b))).
Dette impliserer at mengden h=> (L/1/(a) => L/1/(b)) er tautologisk. Anta nå at satsen holder for k≥0. Mao. anta:

(3) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(a) => L/k+1/(b)) er en tautologisk mengde gitt at a=>b er tautologisk. Anta (4) a=>b er tautologisk. Det er da nødvendig å bevise at

(+) SN/n,0,k+1/(L/n/(h)) => (L/k+2/(a) => L/k+2/(b)) er tautologisk.

Anta derfor for vilkårlig x at (5) xêSN/n,0,k+1/(L/n/(h)) & xêL/k+2/(a). Fra dette følger (6) L/k+1/(a)êN(x) i lys av definisjonen av L og L/n/. Den første halvdelen av (5) impliserer:

(7) (An)(0≤n≤k+1 –> xêL/n/(h)) Vi ønsker nå å vise at dette impliserer at (8) SN/n,0,k/(L/n/(q)) êN(x). For å vise dette vil det være tilstrekkelig å godtgjøre at: (9) (An)(0≤n≤k –> L/n/(h)). Dette vises slik: Anta 0≤r≤k for et vilkårlig naturlig tall r. Da har man r+1 ≤ k+1 og derfor i lys av (7) at xêL/r+1/(h). Dette er ekvivalent med xêL(L/r/(h)), som i sin tur er ekvivalent med L/r/(h)êN(x). Dette viser at (9) holder. Fra (7) følger at xêh om

man setter n=0. Siden h Inkl q og q er mengden av alle de normale punktene i <X,N>, følger det at alle punktene i h er normale. Fra dette, (3), (6) og (8) følger, siden N(x) da er deduktivt lukket, at L/k+1/(b)êN(x). Siden x var et vilkårlig objekt slik at (5) holdt har vi nå vist: (Ax)(xêSN/n,0,k+1/(L/n/(h)) –>(xêL/k+2/(a) –> xêL/k+2/(b))). Fra dette følger umiddelbart (+). Dette viser at punkt (iii) holder.

Ad (iv). Anta a=>b er en tautologisk mengde og anta at

(1) xêSN/n,0,∞/(L/n/(h)) & xê(L/k+1/(a) for vilkårlig x og k≥0. Nå har man at: SN/n,0,∞/(L/n/(h)) Inkl SN/n,0,k/(L/n/(h)). Derfor følger fra (1):

(2) xêSN/n,0,k/(L/n/(h)) & xê(L/k+1/(a). Fra dette, det vi viste under forrige punkt, og det forhold at a=>b er tautologisk følger at xêL/k+1/(b). Dette viser at SN/n,0,∞/(L/n/(h)) => (L/k+1/(a) => L/k+1/(b)) er en tautologisk mengde. Dette avslutter beviset for punkt (iv).

Ad (v). Også dette punktet bevises ved induksjon på k. Vi viser først at påstanden holder for k=0. Anta (1) a;1Ω...Ωa;r =>b er en tautologisk mengde. Da må det først bevises at (+) h => (L(a;1)Ω...ΩL(a;r) => L(b)) er en tautologisk mengde. Anta derfor (2) xêh & xê(L(a;1)Ω...ΩL(a;r). Fra dette følger (3) xêh og
(4) a;1êN(x)&...&a;rêN(x). Siden xêh Inkl q er x et normalt punkt i modal-funksjonen <X,N>. Dette, (4) og definisjonen av normalt punkt impliserer at
(5) (a;1Ω...Ωa;r)êN(x). I lys av (1) har man at (a;1Ω...Ωa;r) Inkl b. Dette og (5) impliserer bêN(x) og derfor at xêL(b). Dette viser at (+) holder.

La oss nå se på induksjonstrinnet: Anta satsen holder for k. Vi må da vise at den holder for k+1. Anta (1) a;1Ω...Ωa;r => b er tautologisk. Dette innebærer at (6) a;1Ω...Ωa;r Inkl b. Fra induksjonshypotesen følger at:

(7) SN/n,0,k/(L/n/(h)) =>(L/k+1/(a;1)Ω...ΩL/k+1/(a;n) => L/k+1/(b))
er en tautologisk mengde. Anta nå at (8) xêSN/n,0,k+1/(L/n/(h)) og at
(9) xê(L/k+2/(a;1)Ω...ΩL/k+2/(a;n). Fra dette siste følger i lys av definisjonen av L/n/:
(10) L/k+1/(a;1)êN(x) &...& L/k+1/(a;r)êN(x). Fra (7) følger xêL/0/(h)=h. Siden h Inkl q innebærer dette at x er et normalt punkt i strukturen <X,N> og vi har derfor i lys av (6) at
(11) L/k+1/(a;1)Ω...ΩL/k+1/(a;r)êN(x). Fra (8) følger:

(12) (An)(0≤n≤k+1 –> xêL/n/(h)). Anta for vilkårlig naturlig tall s at 0≤s≤k. Da har man at s+1≤k+1. Fra dette og (12) kan man slutte xêL/s+1/(h). Herav følger xêL(L/s/(h)). Dette innebærer per definisjon av L at L/s/(h)êN(x). Man har altså at (13) (As)(0≤s≤k –> L/s/(h)êN(x)). Siden x er et normalt punkt i <X,N> følger da at SN/n,0,k/(L/n/(h))êN(x). Fra (7), (11), (13) samt det faktum at x er et normalt punkt følger at L/k+1/(b)êN(x) og derfor at xêL/k+2/(b). Dette viser at påstanden holder.

Ad (vi). Denne delen av satsen følger umiddelbart fra punkt (v) ved å sette r=2. Det skulle derfor ikke være nødvendig å kommentere dette mer utførlig.

Ad (vii). At a<=> b er en tautologisk mengde innebærer at a=b. Det følger da umiddelbart at (Ax)(xêX –> (xêL/n/(a) <–> xêL/n/(b))). Herav har man så at L/n/(a) <=> L/n/(b) er en tautologisk mengde.

Ad (viii). Også denne satsen bevises ved induksjon på k. Er k=0 må vi vise at h=>L(X) er en tautologisk mengde. Men er xêh har vi at xêq ifølge forutsetningen i teoremet og da følger det at x er et normalt punkt i <X,N>. Dette innebærer imidlertid at XêN(x). Men da har vi ved hjelp av definisjonen av L at xêL(X)= L/1/(X). Dette viser at h=>L(X) er tautologisk. Anta nå at induksjonshypotesen holder, mao. at (1) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => L/k+1/(X) er tautologisk. Det er da nødvendig å vise at:

(+) SN/n,0,k+1/(L/n/(h)) => L/k+2/(X) er tautologisk. Anta derfor
(2) xêSN/n,0,k+1/(L/n/(h)) for vilkårlig x. Da har man:

(3) (An)(0 ≤ n ≤ k+1 –> xêL/n/(h)). Anta s er et vilkårlig naturlig tall der 0 ≤ s ≤k. Da følger at s+1≤k+1 og derfor ved hjelp av (3) at xêL/s+1/(h). Dette er ekvivalent med at xêL(L/s/(h)), noe som i sin tur innebærer L/s/(h)êN(x). Vi har derfor vist: (4) (As)(0 ≤s ≤n –> L/s/(h)êN(x)). Videre har vi fra (3) at xêL/0/(h) = h og derfor siden h Inkl q at x er et normalt punkt. Fra dette og (4) følger SN/n,0,k/(L/n/(h))êN(x). Dette impliserer sammen med (1) og et at x er et normalt punkt at L/k+1/(X)êN(x). Men herav xêL(L/k+1/(X))= L/k+2/(X). Dette er hva vi ønsker. Punkt (viii) holder derfor.

Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D**

Teorem 3.2 Anta <X,N> er en begrenset modalfunksjon. Anta q er de normale punktene i <X,N> og at ø≠h Inkl q. Anta a,c êPt(X) og at n,kêNat. Da gjelder at de følgende mengder er tautologiske:

(i) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(a)Ω.L/k+1/(b) => L/k+1/(aΩb))
(ii) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(aΩb) => L/k+1/(a)Ω.L/k+1/(b))
(iii) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(a)Ω.L/k+1/(b) <=> L/k+1/(aΩb))
(iv) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(a => b) => L/k+1/(a) => L/k+1/(b))

Bevis: Dette teoremet kan oppfattes som et korollar til Teorem 3.1. Siden aΩb => aΩb er en tautologisk mengde følger punkt (i) ved hjelp av punkt (v) i Teorem 3.1. Siden vi også har at aΩb =>a og aΩb => b er tautologiske mengder har vi ved hjelp av punkt (iv) i Teorem 3.1 at såvel
(1) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(aΩb) => L/k+1/(a)) som
(2) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(aΩb) => L/k+1/(b)) er tautologiske. Men fra dette følger punkt (ii) i teoremet. Punkt (iii) i teoremet ovenfor er en enkel konsekvens av de to foregående punkter. Når det gjelder det siste punktet bemerkes at (a=>bΩa) =>b er en tautologisk mengde. Fra dette og punkt (vi) i Teorem 3.1 følger at følgende mengde er tautologisk:
(3) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(a=>b)Ω.L/k+1/(a) => L/k+1/(b))
Men er a =>((bΩc)=>d) en tautologisk mengde er også a=>(b=>(c =>d)) en sådan mengde. Fra dette og (3) følger det siste punktet i teoremet. **Q.E.D**

Teorem 3.3 Anta <X,N> er en begrenset modalfunksjon. Anta q er de normale punktene i <X,N> og at ø≠h Inkl q. Anta a,b,c êPt(X) og at n,kêNat. Da gjelder:
(i) P/n/(a) = –L/n/(–a)
(ii) Er –a tautologisk gjelder at SN/n,0,k/(L/n/(h)) => –P/k+1/(a) er tautologisk.
(iii) Er a;1,....,a;r,bêPt(X) & r≥1, og er b=>a;1U...Ua;n en tautologisk mengde gjelder for alle k≥0 at følgende mengde er tautologisk:
SN/n,0,k/(L/n/(h)) =>
(P/k+1/(b) => P/k+1/(a;1)U...UP/k+1/(a;n))
(iv) Er a=>b en tautologisk mengde har man, om k≥0, at også
SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (P/k+1/(a) => P/k+1/(b)) er en tautologisk mengde
(v) Er a=>b en tautologisk mengde har man, om k≥0, at også
SN/n,0,∞/(L/n/(h)) => (P/k+1/(a) => P/k+1/(b)) er en tautologisk mengde
(vi) Er a => bUc en tautologisk mengde og k≥0 gjelder at

SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (P/k+1/(a) => P/k+1/(b)U P/k+1/(c)) er en tautologisk mengde
(vii) Er a <=> b en tautologisk mengde er også P/n/(a) <=> P/n/(b) en tautologisk mengde.

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Ad (i). Denne påstanden bevises ved induksjon på n. For n=0 holder den åpenbart i kraft av definisjonene av P/n/ og L/n/. Anta den holder for n≥0, mao. at P/n/(a) = –L/n/(–a). Vi har da at P/n+1/(a)= P(P/n/(a)) = P(–L/n/(–a)) =

–L–(–L/n/(–a)) = –L(L/n/(–a)) = –L/n+1/(a).

Dette viser at satsen holder.

Ad (ii). Anta (–a) er en tautologisk mengde. Ved hjelp av Teorem 3.1, punkt (viii), har vi da at SN/n,0,k/(L/n/(h)) => L/k+1/(–a) er tautologisk. I lys av punkt (i) i dette teoremet følger herav at SN/n,0,k/(L/n/(h)) => –P/k+1/(a) er en tautologisk mengde.

Ad (iii). Anta a;1,....,a;r,bêPt(X) & r≥1, og er b=>a;1U...Ua;n en tautologisk mengde. Da har man ved hjelp av Boolsk algebra at (–a;1)Ω...Ω(–a;r) => –b er en tautologisk mengde. Fra dette og Teorem 3.1, punkt (v), følger at:

SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(–a;1)Ω...ΩL/k+1/(–a;n) => L/k+1/(–b)) er en tautologisk mengde. Man innser imidlertid lett at dette er ekvivalent med at

SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (–L/k+1/(–b) => –L/k+1/(–a;1)Ω...Ω–L/k+1/(–a;n)) er en tautologisk mengde. I lys av det som ble vist under punkt (i) er dette dette ekvivalent med at følgende mengde er tautologisk:

SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (P/k+1/(b) => P/k+1/(a;1)Ω...ΩP/k+1/(a;n))

Ad (iv). Dette følger direkte fra det foregående punkt ved å sette r=1.
Ad (v). Siden SN/n,0,∞/(L/n/(h) Inkl SN/n,0,k/(L/n/(h)) følger dette fra det som ble vist under punkt (v).
Ad (vi). Også dette følger fra det som ble vist under punkt (iii). Setter man r=2 i denne satsen ser man umiddelbart at

SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (P/k+1/(a) => P/k+1/(b)U P/k+1/(c))

er en tautologisk mengde om a=>bUc er det.
Ad (vii). Dette er i det vesentlige trivielt fordi det at a <=>b er en tautologisk mengde impliserer at a=b. Da må vi ha at P/n/(a) = P/n/(b) og derfor at
P/n/(a) <=> P/n/(b) er en tautologisk mengde. **Q.E.D**

Teorem 3.4 Anta <X,N> er en begrenset modalfunksjon. Anta q er de normale punktene i <X,N> og at ø≠h Inkl q. Anta a,c êPt(X) og at n,kêNat. Da gjelder at de følgende mengder er tautologiske:

(i) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (P/k+1/(a)U P/k+1/(b) => P/k+1/(aUb))
(ii) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (P/k+1/(aUb) => P/k+1/(a)U P/k+1/(b))
(iii) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (P/k+1/(a)U P/k+1/(b) <=> P/k+1/(aUb))
(iv) SN/n,0,k/(L/n/(h)) => ((–P/k+1/(a)) ΩP/k+1/(b) => P/k+1/((–a)Ω b))

Bevis: Denne satsen bevises på grunnlag av Teorem 3.3 på akkurat samme måte som Teorem 3.2 ble bevist på grunnlag av Teorem 3.1. Vi overlater derfor beviset for punkt (i) – (iii) til leseren. Når det gjelder (iv) ser man at mengden:

SN/n,0,k/(L/n/(h)) => ((–P/k+1/(a)) ΩP/k+1/(b) => P/k+1/((–a)Ω b))

er identisk med i lys av punkt (i) i Teorem 3.3:

SN/n,0,k/(L/n/(h)) => ((L/k+1/(–a)) Ω–L/k+1/(–b) => –L/k+1/(b=>a)

Denne mengden er i sin tur identisk med:
SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(b=>a)=>–(L/k+1/(–a)) Ω–L/k+1/(–b)))
Denne mengden er identisk med:
SN/n,0,k/(L/n/(h)) => (L/k+1/(b=>a)=>(L/k+1/(–a)) => L/k+1/(–b)))
Men at denne mengden er tautologisk ser man lett på grunnlag av Teorem 3.1, punkt (vi) når man tar i betraktning at mengden ((b=>a)Ω(–a)) => (–b) er tautologisk. **Q.E.D.**

Teorem 3.5 Anta <X,N> er en begrenset modalfunksjon. Anta q er de normale punktene i <X,N> og at ø≠h Inkl q. Anta a,c êPt(X) og at n,kêNat. Da gjelder at de følgende mengder er tautologiske:

(i) h=>(L(a)=>L(b=>a))
(ii) h=>(L(–a)=>L(a=>b))
(iii) P(X) <=> –L(ø)
(iv) h=>(L(a<=>b) => (P(a)<=>P(b)))
(v) h=>(L(a<=>b) => (L(a) <=>L(b)))
(vi) h=>(L(a)UL(b) => L(aUb))
(vii) h=>(P(aΩb) => P(a)ΩP(b))
(viii) h=>(L(a)ΩP(b) => P(aΩb))
(ix) h=>(L(aUb) => P(a)UL(b))
(x) h=>(P(a=>b)UL(b=>a))
(xi) h=>(P(a =>b) <=> (L(a) =>P(b)))
(xii) h=>(P(X) <=> (L(a) =>P(b)))
(xiii) h=>((P(a) =>L(b)) => L(a=>b))
(xiv) h=>((P(a) => L(b)) => (L(a) => L(b)))
(xv) h=>((P(a) => L(b)) => (P(a) => P(b)))

Bevis: Beviset for denne satsen er i det vesentlige såpass likefrem og enkelt at det kan overlates som en øvelse til leseren. **Q.E.D**

Teorem 3.6 Anta <X,N> er en begrenset modalfunksjon. Anta q er de normale punktene i <X,N> og at ø≠h Inkl q. Anta a,c êPt(X) og at n,kêNat. Da gjelder at de følgende mengder er tautologiske:

(i) LL(a) <=>–PP(–a)
(ii) LL(–a) <=> –PP(a)
(iii) PP(–a) <=> –LL(a)
(iv) LP(–a) <=> –PL(a)
(v) PL(a) <=> –LP(–a)
(vi) h=>(–P(aUb) <=> –P(a)Ω–P(b))
(vii) h=>(P(aUb) <=> P(a)UP(b))
(viii) h=>(L(a=>b) => (P(a) => P(b)))
(xi) h=>(L((–a)=>a) <=> L(a))
(xii) h=>(L(a=>(–a)) <=> L(–a))
(xiii) h=>(L((–b)=>a)ΩL(b=>a) <=> L(a))
(xvi) h=>(L(a) =>(P(b) => P(aΩb)))
(xvii) Er a en tautologisk mengde så er h=>(P(b)=>P(aΩb)) det også.

Bevis: Også beviset for denne satsen er i det vesentlige såpass enkelt at det kan overlates til leseren. **Q.E.D**

La oss også avslutte denne paragrafen med et teorem som gir en en slags alternativ karakteristikk av operasjonen P i forbindelse med begrensede modalfunksjoner. Dette teoremet er analogt med Teorem 2.6 som ble nevnt i §2. Satsen er denne:

Teorem 3.7: Anta <X,N> er begrenset modalfunksjon. Anta q er mengden av de normale punktene i <X,N>. La L og P være definert som tidligere, nemlig ved:
L(a) = Mg(w: aêN(w)) og P(a) = –(L(–a))
Da har man at om wêq at wêP(a) <–> aΩ SN(Mg(b: bêPt(X)& wêL(b))) ≠ø

Bevis: (a) La oss først bevise kondisjonalen mot venstre. Anta aΩ SN(Mg(b: wêL(b))) ≠ø Da må det finnes noe y slik at:
(1) yêa & (Ab)(bêPt(X)& wêL(b) –> yêb). Anta nå mot for modning at ¬(wêP(a)). Fra definisjonen av P kan man da slutte at wêL(–a). Siden (–a)êPt(X) følger da ved hjelp av (1) at yê(–a). Dette strider mot den første konjunkten i (1). Det følger at wêP(a).

(b) Vi beviser så kondisjonalen mot høyre. Anta wêP(a). Dette innebærer at wê(–L(–a)). Mao. har vi da ¬(wêL(–a)). Ved hjelp av definisjonen av L har vi da ¬(wêMg(y: yêX &(–a)êN(y))). Siden wêX følger derfor (2) ¬((–a)êN(w)). Anta nå for reduktio ad absurdum at aΩ SN(Mg(b: bêPt(X)& wêL(b))) =ø. Da har man: (Ax)(xêSN(Mg(b: bêPt(X)& wêL(b))) –> ¬(xêa)). Dette impliserer:
(Ax)((Ab)(bêPt(X)& wêL(b) –>xêb) –> ¬(xêa)) Ved hjelp av definisjonen av L følger fra dette: (Ax)((Ab)(bêPt(X) & bêN(w).–> xêb) –> xê(–a)). Mao. har man (Ax)(xêSN(N(w)) –> xê(–a)). Dette vil si: (3) SN(N(w)) Inkl (–a). Men siden w er et normalt punkt i <X,N> følger at SN(N(w)) êN(w). Videre følger fra dette, (3) og definisjonen av normalt punkt at (–a)êN(w). Men dette strider åpenbart mot (2). Dette viser at aΩ SN(Mg(b: bêPt(X)& wêL(b))) ≠ø. Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

En lignende kommentar som den som ble gitt til Teorem 2.6 kan gis her. Man har at SN(Mg(b: bêPt(X)& wêL(b))) representerer snittet av alle de utsagnene som er logisk nødvendig sanne i verdenen w. Er aêPt(X) og har man a er konsistent med alle de utsagnene som er logisk nødvendig sanne i verdenen w hvis og bare hvis aΩ SN(Mg(b: bêPt(X)& wêL(b))) ≠ø. Dette innebærer at wêP(a) derfor representerer den påstand at a er konsistent med alt som er nødvendig sant i verdenen w. Teoremet ovenfor kan derfor oppfattes som det formelle uttrykket for dette.

§4 Begrensede relasjonelle strukturer og modalfunksjoner

Definisjon 4.1 En *begrenset relasjonell struktur* er et triple <X,Q,R> der X og Q er ikke-tomme mengder og hvor Q Inkl X. R er en relasjon, der R Inkl Prod(X,X).

Definisjon 4.2 En *begrenset normal relasjonell struktur* er et triple <X,Q,R> der X og Q er ikke-tomme mengder og hvor Q Inkl X. R er en relasjon, der R Inkl Prod(X,X), og Q er lukket under R dvs. :
(Ax)(xêQ –>(xRy –> yêQ))

Fra disse definisjonene fremgår det at klassen av de begrensede normale relasjonelle strukturene er strengt inkludert i klassen av de begrensede relasjonelle strukturene.

I forbindelse med begrensede relasjonelle strukturer (også de normale) defineres "=>" og "<=>" som før. Men nødvendighetsoperatoren, L, og mulig-hetsoperatoren, P, defineres litt anderledes enn ved relasjonelle strukturer. L defineres nå slik:

Definisjon 4.3 L(a)= Mg(w:wêQ &(Ay)(wRy –> yêa)) forutsatt at aêPt(X)
P(a) = –L(–a)

Svært meget av det som gjelder for relasjonelle strukturer gjelder også for begrensede relasjonelle strukturer. Det følgende teorem er analogt med Teorem 1.1, men viser at vi må visse punkter må sette inn visse forbehold som ikke forekommer i Teorem 1.1.

Teorem 4.1 Anta <X,Q,R> er en begrenset relasjonell struktur og at L og P er definert på den måten som er fastsatt ved Definisjon 4.2. Da gjelder:

(i) P(a)<=> –L(–a) er en tautologisk mengde.
(ii) L(a) <=> –P(–a) er en tautologisk mengde.
(iii) L(–a) <=> –P(a) er en tautologisk mengde.
(iv) –L(a) <=> P(–a) er en tautologisk mengde.
(v) L/n/(Q)=>(P/n/(a) <=> –L/n/(–a)) er en tautologisk mengde.
(vi) Er a en tautologisk mengde er også L/n/(Q)=> L/n/(a) en tautologisk mengde.
(vii) Er a;1,....,a;m,aêPt(X) og er a;1Ω...Ωa;m => a en tautologisk mengde er også L/n/(a;1)Ω....ΩL/n/(a;m)=>L/n/(a) en tautologisk mengde.
(viii) Er a,bêPt(X) og er a=>b en tautologisk mengde så er også L/n/(a)=>L/n/(b) en tautologisk mengde.
(ix) Er a,b,cêPt(X) og er aΩb=>c en tautologisk mengde er også L/n/(a)ΩL/n/(b)=> L/n/(c) en tautologisk mengde.
(x) Er a,bêPt(X) og a<=>b en tautologisk mengde er også L/n/(a)<=>L/n/(b) en tautologisk mengde.
(xi) L/n/(Q)=> L/n+1/(X) er en tautologisk mengde.
(xii) Er a,bêPt(X) er L/n/(aΩb) => L/n/(a)ΩL/n/(b) tautologisk.
(xiii) Er a,bêPt(X) er L/n/(a)ΩL/n/(b) => L/n/(aΩb) tautologisk.
(xiv) Er a,bêPt(X) er L/n/(aΩb) <=> L/n/(a)ΩL/n/(b) tautologisk.
(xv) Er a,bêPt(X) er L/n/(a=>b) => (L/n/(a)=>L/n/(b)) tautologisk.

Som man ser avviker dette teoremet fra Teorem 1.1 bare ved punktene (v), (vi) og (xi). Beviset for satsen er såpass enkelt at det overlates til leseren.

Teorem 4.2 Anta <X,Q,R> er en begrenset relasjonell struktur og at L og P er definert på den måten som er fastsatt ved Definisjon 4.2. Da gjelder:

(i) L/n/(a) <=> –P/n/(–a) er en tautologisk mengde.
(ii) Er –a en tautologisk mengde er også –P/n/(a) en tautologisk mengde.
(iii) Er a;1,....,a;m,aêPt(X) og er a => a;1U...Ua;m en tautologisk mengde er også P/n/(a)=>P/n/(a;1)U....UP/n/(a;m) en tautologisk mengde.
(iv) Er a,bêPt(X) og er a=>b en tautologisk mengde så er også P/n/(a)=>P/n/(b) en tautologisk mengde.
(v) Er a,b,cêPt(X) og er a=>bUc en tautologisk mengde er også P/n/(a)=> P/n/(b)UP/n/(c) en tautologisk mengde.

(vi) Er a,bêPt(X) og a<=>b en tautologisk mengde er også P/n/(a)<=>P/n/(b) en tautologisk mengde.
(vii) –P/n/(ø) er en tautologisk mengde.
(viii) Er a,bêPt(X) er P/n/(aUb) => P/n/(a)UP/n/(b) tautologisk.
(ix) Er a,bêPt(X) er P/n/(a)UP/n/(b) => P/n/(aUb) tautologisk.
(x) Er a,bêPt(X) er P/n/(aUb) <=> P/n/(a)ΩP/n/(b) tautologisk.
(xi) Er a,bêPt(X) er (–P/n/(a))ΩP/n/(b) => P/n/((–a)Ωb) tautologisk.

Teorem 4.3 Anta <X,Q,R> er en begrenset relasjonell struktur og at L og P er definert på den måten som er fastsatt ved Definisjon 4.2. Da gjelder at de følgende mengder er tautologiske:

(i) L(a)=>L(b=>a)
(ii) L(–a)=>L(a=>b)
(iii) P(X) <=> –L(ø)
(iv) L(a<=>b) => (P(a)<=>P(b))
(v) L(a<=>b) => (L(a) <=>L(b))
(vi) L(a)UL(b) => L(aUb)
(vii) P(aΩb) => P(a)ΩP(b)
(viii) L(a)ΩP(b) => P(aΩb)
(ix) L(aUb) => P(a)UL(b)
(x) P(a=>b)UL(b=>a)
(xi) P(a =>b) <=> (L(a) =>P(b))
(xii) P(X) <=> (L(a) =>P(b))
(xiii) (P(a) =>L(b)) => L(a=>b)
(xiv) (P(a) => L(b)) => (L(a) => L(b))
(xv) (P(a) => L(b)) => (P(a) => P(b))

Bevis: Bevisene for de enkelte punktene i denne satsen er i det vesentlige temmelig enkle og de overlates derfor til leseren. Her skal vi bare gi et detaljert bevis for punkt (xv):

Man har at (xv) er tautologisk hvis og bare hvis:
(+) (–L(–a) => L(b)) =>(–L(–a) => –L(–b)) er tautologisk. Dette er så ekvivalent med at L(–a)UL(b) => (–L(–a) => –L(–b)) er tautologisk. Dette er implisert av at den følgende mengde er tautologisk:

L(–a)U L(b) => (L(–b) => L(–a)) At dette siste er tilfelle kan vises slik:
Anta xê(L(–a)U L(b)). Da har man xêL(–a) eller xêL(b). I det første tilfelle følger ved hjelp av definisjonen av L:

xêQ & (Ay)(xRy –>xê–a)

Dette impliserer åpenbart at:

(1) (xêQ & (Ay)(xRy –>xê–b))–> xêQ & (Ay)(xRy –>xê–a)

ie xê(L(–b) => L(–a)). I det andre tilfellet har man xêQ & (Ay)(xRy –>xêb). Men også dette ser man lett at impliserer (1). Dette viser tydelig at (+) er en tautologisk mengde. **Q.E.D.**

Teorem 4. 4 Anta <X,Q,R> er en begrenset relasjonell struktur og at L og P er definert på den måten som er fastsatt ved Definisjon 4.2. Anta a, b er delmengder av X. Da er de følgende mengder tautologiske:

(i) LL(a) <=>–PP(–a)
(ii) LL(–a) <=> –PP(a)
(iii) PP(–a) <=> –LL(a)

(iv) LP(–a) <=> –PL(a)
(v) LP(–a) <=> –PL(a)
(vi) –P(aUb) <=> –P(a)Ω–P(b)
(vii) P(aUb) <=> P(a)UP(b)
(viii) L(a=>b) => (P(a) => P(b))
(xi) L((–a)=>a) <=> L(a)
(xii) L(a=>(–a)) <=> L(–a)
(xiii) L((–b)=>a)ΩL(b=>a). <=> L(a)
(xvi) L(a) =>(P(b) => P(aΩb))
(xvii) Er a en tautologisk mengde så er P(b)=P(aΩb) det også.

Definisjon 4.4 Anta <X,N> er en begrenset modalfunksjon og at q er klassen av alle de normale punktene i X. Har man da at

(Ax)(xêq –> qêN(x))

kalles <X,N> for en begrenset normal modalfunksjon.

Teorem 4.5 Anta <X,Q,R> er en begrenset normal relasjonell struktur. Definer en funksjon N ved:

aêN(x) <–> (Ay)(xRy –> yêa) om aêPt(X) og xêQ.

Sett N(x)={{x}} om xê(X–Q). Da har man at <X,N> er en begrenset normal modalfunksjon der mengden av de normale punkter i X er identisk med mengden Q.

(i) Er R en refleksiv relasjon over Q gjelder , om xêQ & aêPt(X) at
aêN(x) –> xêa

(ii) Er R en seriell relasjon over Q, dvs. har man (Ax)(xêQ –> (Ey)(yêQ &xRy)), gjelder at ¬(øêN(x)) for alle xêQ

(iii) Er R transitiv over Q, ie er det slik at
(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêQ & xRy & yRz –> xRz) gjelder for alle xêQ og aêPt(X) at
aêN(x) –> Mg(y: yêQ & aêN(y))êN(x)

(iv) Er R symmetrisk over Q, dvs. (Ax)(Ay)(x,yêQ &xRy –> yRx) gjelder for alle aêPt(X) og alle xêQ at:
¬(xêa) –> Mg(y: yêQ &¬(aêN(y)))êN(x)

(v) Er R en evklidisk relasjon over Q dvs. har man:
(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêQ & xRy & xRz –> yRz) gjelder om aêPt(X) og xêQ:
¬(aêN(x)) –> Mg(y: yêQ & ¬(aêN(y)))êN(x)

Som man ser er det en hvis analogi mellom dette teoremet og Teorem 2.1. Det skulle også være forholdsvis lett å se at man faktisk får Teorem 2.1 om man i teoremet ovenfor setter Q=X. Teoremet kan derfor oppfattes som en slags generalisering av Teorem 2.1.

Bevis: Man må først vise at <X,N> er en begrenset normal modalfunksjon. Anta derfor at xêQ og at ø≠a Inkl N(x) der aêPt(Pt(X)). Fra dette følger at
(Ay)(yêa –> yêN(x)). Fra dette og definisjonen av N kan man slutte:
(Ay)(yêa –> (Az)(xRz–> zêy)) Dette er imidlertid eksvivalent med:
(Az)(xRz –> (Ay)(yêa –> zêy)) Fra dette og definisjonen av N kan man så slutte SN(a)êN(x). Man ser videre lett på basis av definisjonen av N at dersom a,bêN(x) og a Inkl b så må også bêN(x). Videre skulle det være klart i lys av definisjonen av N at XêN(x) om xêQ. Dette viser at alle elementene i Q er normale. Er på den annen side xêX–Q har vi at

N(x)={{x}}. Da kan man ikke ha at XêN(x) siden vi forutsetter at <X,Q,R> er en begrenset relasjonell struktur. Da må Q≠ø. Dette viser at Q er nøyaktig de normale punktene i <X,N>. Siden Q er lukket under relasjonen R følger det ved hjelp av definisjonen av N at

(Ax)(xêQ –> QêN(x)). Dette innebærer at hvis x er et normalt punkt i X så er mengden av de normale punktene i X, dvs. Q, med i N(x). Dermed er det blitt bevist at <X,N> er en begrenset normal modalfunksjon.

Ad (i). Anta at R er en refleksiv relasjon over Q. Og anta at (1) aêN(x) for vilkårlig aêPt(X) og xêQ. Siden R er refleksiv over Q følger da xRx. Dette, (1) og definisjonen av N impliserer åpenbart at xêa som er hva man ønsker i dette tilfellet.

Ad (ii). Anta R er seriell over Q, dvs at

(2) (Ax)(xêQ –> (Ey)(yêQ &xRy))

Anta for reduktio ad absurdum øêN(x) for noe xêQ. Da følger ved hjelp av definisjonen av N at (3) (Ay)(xRy –> yêø). Men fra (2) følger xRz & zêQ for noe z. Dette og (3) gir en zêø som åpenbart er umulig.

Ad (iii). Anta R er transitiv over Q. Med andre ord at:

(4) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêQ & xRy & yRz –> xRz)

Anta videre at (5) aêN(x) for vilkårlig aêPt(X) og vilkårlig xêQ. Fra definisjonen av N følger da: (6) (Ay)(xRy –> yêa). Det er nå nødvendig å bevise:

(7) (Ay)(xRy –> yêMg(z: zêQ & aêN(z))). Dette innebærer at det er tilstrekkelig å bevise:

(8) (Ay)(xRy –> yêQ & aêN(y)). Nå er det åpenbart at (Ay)(xRy –> yêQ) siden vi forutsetter at xêQ og Q er lukket under R. Vi behøver derfor bare å vise at (Ay)(xRy –> aêN(x)). Men i lys av definisjonen av N er dette ekvivalent med:

(9) (Ay)(xRy –> (Az)(yRz –> zêa)). Anta derfor for vilkårlige y og z at xRy &yRz. Siden xêQ og Q er lukket under relasjonen R følger at y,zêQ. Siden R er transitiv over Q må man derfor ha xRz. Men fra dette og (6) følger zêa. Dette viser at (9) holder og avslutter dermed vårt bevis for punkt (iii).

Ad (iv). Anta R er symmetrisk over Q, dvs. at

(10) (Ax)(Ay)(x,yêQ & xRy –> yRx). Anta videre at (11) ¬(xêa) for vilkårlig xêQ og vilkårlig aêPt(X). Det er da nødvendig å bevise

(Ay)(xRy –> yêQ & ¬(aêN(y)))

At man har (Ay)(xRy –> yêQ) er trivielt siden xêQ og Q er lukket under relasjonen R. Vi må imidlertid også vise at (Ay)(xRy –> ¬(aêN(y))), med andre ord at (Ay)(xRy –> ¬(Az)(yRz –> zêa)). Dette er ekvivalent med:

(Ay)(xRy –> (Ez)(yRz &¬(zêa)))

Anta xRy for vilkårlig y. Siden xêQ og Q er lukket under R følger at yêQ. Ved hjelp av (10) har man da at (12) yRx. Fra dette og (11) følger (Ez)(yRz & ¬(zêa)). Dette viser at påstanden holder.

Ad (v). Anta R er en evklidisk relasjon over Q, det vil si at:

(13) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêQ & xRy & xRz –> yRz) Anta for vilkårlig xêQ og vilkårlig aêPt(X) at (14) ¬(aêN(x)). I lys av definisjonen av N innebærer dette at

(14) ¬(Ay)(xRy–> yêa). Dette er åpenbart ekvivalent med

(15) (Ey)(xRy & ¬(yêa))

Man må vise at: (Ay)(xRy –> .yêQ & ¬(aêN(x))). At (Ay)(xRy –> yêQ) er trivielt siden Q er lukket under R og xêQ. Anta derfor (16) xRy for vilkårlig y. Fra (15) følger at det finnes z der (17) xRz & ¬(zêa). Fra (16), (17) og (13) følger

yRz & ¬(zêa). Herav (Ez)(yRz & ¬(xêa)). Men y var vilkårlig derfor har vi vist: (Ay)(xRy –> (Ez)(yRz & ¬(xêa))). Dette innebærer:

(Ay)(xRy –> ¬(Az)(yRz – xêa))

I lys av definisjonen av N er dette ekvivalent med: (Ay)(xRy –> ¬(aêN(x)))
Dette avslutter beviset for Teorem 4.5. **Q.E.D.**

Teorem 4.6 Anta <X,N> er en begrenset modalfunksjon. La q være mengden av alle de normale punktene i X. Anta k≠ø og at k Inkl q. Anta videre at følgende holder:

(Ax)(xêk –> kêN(x))

Definer en relasjon R over X ved å sette:

R= Mg(<x,y>: x,yêk & yêSN(N(x)))

Da gjelder følgende:

(i) <X,k,R> er en begrenset relasjonell struktur

(ii) (Ax)(Aa)(xêk & aêPt(X) –> (aêN(x) <–> (Ay)(xRy –> yêa)))

(iii) Gjelder (Ax)(xêk –> ¬(øêN(x)) har man:

(Ax)(xêk –> (Ey)(yêk & xRy))

(iv) Har man at (Aa)(Ax)(xêk & aêPt(X) –>(aêN(x)–>xêa)) gjelder at R er refleksiv over k, ie. (Ax)(xêk –> xRx)

(v) Har man at aêN(x) –> Mg(y: aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêk gjelder at R er en transitiv relasjon over k:

(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêk & xRy &yRz –> xRz)

(vi) Har man at ¬(xêa) –> Mg(y:yêk &¬(aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêk gjelder at R er symmetrisk over k:

(Ax)(Ay)(x,yêk & xRy –> yRx)

(vii) Har man at ¬(aêN(x)) –> Mg(y:yêX &¬(aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêk gjelder at R er evklidisk over k:

(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêk & xRy &xRz –> yRz)

Som man ser er det stor likhet mellom denne satsen og Teorem 2.2 ovenfor. Faktisk får man Teorem 2.2 fra satsen ovenfor om man setter k=X. Beviset for Teorem 4.4 er også i vesentlige henseende likt med Teorem 2.2.

Bevis: *Ad (i).* Vi bemerker først at slik R og k er definert er k lukket under R, dvs. at vi har: (Ax)(xêk –> (Ay)(xRy –> yêk)). Videre har man åpenbart ved hjelp av forutsetningene at R Inkl kXk. Dette innebærer at <X,k,R> er en begrenset relasjonell struktur.

Ad (ii). Anta x og a er vilkårlige objekter der man har xêk & aêPt(X). Anta aêN(x) & xRy for vilkårlig y. Fra definisjonen av R følger da at x,yêk & yêSN(N(x)). Det siste innebærer at (Ab)(bêN(x) –> yêb). Men siden aêN(x) må man da ha yêa). Dette viser at aêN(x) –> (Ay)(xRy –> yêa). Anta på den annen side at (Ay)(xRy –> yêa). Da har man i lys av definisjonen av R at (Ay)(yêSN(N(x)) –> yêa). Dette impliserer (1) SN(N(x)) Inkl a. Siden xêk er x et normalt punkt i X. Derfor har man (2) SN(N(x))êN(x). Dette og (1) impliserer at aêN(x). Dette viser at punkt (ii) holder.

Ad (iii). Anta ¬(øêN(x)) for alle xêk. Anta xêk. Det er nødvendig å bevise: (3) (Ey)(yêk &yêSN(N(x))). Anta for reduktio ad absurdum at (3) ikke holder, med andre ord at: (4) (Ay)(yêSN(N(x)) –> ¬(yêk)). Dette er ekvivalent med (Ay)((Aa)(aêN(x) –> yêa) –> ¬(yêk)) som i sin tur er ekvivalent med: (5) (Ay)(yêk –> (Ea)(aêN(x) & ¬(yêa))). Det er to muligheter når det gjelder k: *Tilfelle (i):* k inneholder kun ett element, dvs. at k={z} for noe zêX. Da følger ved hjelp av (5) at (6) aêN(x) & ¬(zêa) for noe a. Siden vi per hypotese har at (Ax)(xêk –> kêN(x)) følger det at kêN(x) siden xêk. Fra (6) følger at aΩ{z}=ø. Men k={z} êN(x) og aêN(x). Siden N(x) er lukket under snitt følger da at aΩ{z}=øêN(x). Men dette er umulig. Det tilfelle at k={z} for noe z er derfor utelukket. *Tilfelle (ii):* k inneholder minst to elementer z;1 og z;2. Fra (5) følger da ved hjelp av utvalgsaksiomet at det finnes en funksjon F der:

(7) Dom(F)=k & (Ay)(yêk –> (F(y)êN(x) & ¬(yêF(y))))

La s= SN/yêk/(F(y)). Siden xêk og derfor er et normalt punkt i X har vi at
(8) s=SN/yêk/(F(y))êN(x). Nå har vi at xêk og etter forutetningene at
(Ay)(yêk –> kêN(y)). Det følger derfor at kêN(x). Fra dette og (8) følger det, siden x er et normalt punkt i x at (kΩSN/yêk/(F(y)))êN(x). Sett nå per definisjon:

(9) s;2= (kΩSN/yêk/(F(y)))

Anta zês;2 for noe z. Da zêk og zêSN/yêk/(F(y)). Fra dette og (7) følger det at

(10) ¬(zêF(z))

Siden zêk har vi imidlertid at kΩSN/yêk/(F(y)) Inkl SN/yêk/(F(y)) Inkl F(z). Men dette innebærer at zêF(z) som strider mot (10). Det følger at s;2=øêN(x) som er umulig.

Dette viser at også i dette tilfelle får vi en motsigelse. I begge tilfelle får vi en motsigelse. (4) må følgelig være umulig og man kan konkludere med at (3) er tilfelle.

Ad (iv): Anta (11) (Aa)(Ax)(xêk & aêPt(X) –>(aêN(x)–>xêa)). Vi må da vise i lys av definisjonen av R at xêSN(N(x)) om x er et vilkårlig element i k. I lys av definisjonen av SN er tilstrekkelig å bevise (Aa)(aêN(x) –> xêa) om xêk. Men dette følger direkte fra (11) siden N(x) Inkl Pt(X).

Ad (v): Anta at (12) aêN(x) –> Mg(y: aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêk. Anta for vilkårlige objekter x,y,zêk at xRy og yRz. Dette innebærer at:

(13) yêSN(N(x)) & zêSN(N(y))

Fra dette følger:

(14) (Aa)(aêN(x) –> yêa) & (Aa)(aêN(y) –> zêa)

Det vil være tilstrekkelig å bevise at (Aa)(aêN(x) –> zêa). Anta derfor at aêN(x). Da følger ved hjelp av (12) at Mg(y: aêN(y))êN(x). Fra dette og (14) følger at
yêMg(y: aêN(y)). Herav aêN(y). Men dette og (14) impliserer zêa. Det følger at
(Aa)(aêN(x) –> zêa). Med andre ord at xRz. Dette viser at punkt (v) holder.

Ad (vi): Anta (15) ¬(aêN(x)) –> Mg(y:yêX &¬(aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêk. Anta for vilkårlige x,yêk at xRy. Dette innebærer at yêSN(N(x)), mao. at (16) (Aa)(aêN(x) –> yêa). Vi må vise at (Aa)(aêN(y) –> xêa). Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finne en cêPt(X) der cêN(y) &¬(xêc). Fra dette og (15) følger Mg(y:yêX &¬(cêN(y))êN(x). Men fra dette og (16) følger ¬(cêN(y)) som åpenbart gir oss en motsigelse. Dette viser at det ikke kan finnes noen c som er slik at cêN(y) &¬(xêc). Mao. har vi (Aa)(aêN(y) –> xêa) som er det vi ønsker.

Ad (vii): Anta (17) ¬(aêN(x)) –> Mg(y:yêX &¬(aêN(y))êN(x) for alle aêPt(X) og alle xêk. Anta x,y,zêk & xRy &xRz for vilkårlige x,y,z. Dette innebærer at
(18) (Aa)(aêN(x) –> yêa) & (Aa)(aêN(x) –> zêa). Det må bevises at
(Aa)(aêN(y) –> zêa). Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes en c slik at cêN(y) & ¬(zêc). Fra dette og (18) følger ¬(cêN(x)). Dette impliserer i sin tur i lys av (17) at Mg(z: zêX &¬(cêN(z))êN(x). Herav følger ved hjelp av (18) at
¬(cêN(y)). Dette gir en en motsigelse. Man må derfor ha (Aa)(aêN(y) –> zêa). Dette vil si at yRz.

Dette avslutter vårt bevis for Teorem 4.6. **Q.E.D.**

I forbindelse med det som vi nå har kalt for begrensede normale modalfunk-sjoner kan det også være av interesse å gjøre de følgende iaktagelser:

Anta <X,N> er en begrenset modalfunksjon og at q er mengden av alle de normale punktene i <X,N>. Anta h er en ikke-tom mengde som er inkludert i q, mao. h Inkl q.

Anta (1) h Inkl L(h) Følger da fra dette at h Inkl L/n/(h) for alle n≥1? Siden h Inkl L(h) har man at h=>L(h) er en tautologisk mengde. Nå har man at
(2) h=>L(X) er tautologisk. Siden h=>L(h) er tautologisk følger at (h=>L(h))=X. Herav følger så: h=>L(h=>L(h)). Men siden h=>L(h) må man da ha at h=>LL(h), siden alle punktene i h er inkludert i q og derfor er normale. Vi har nå vist at h=>L/n/(h) er tautologisk om n=1,2. Anta h=>L/n/(h) er tautologisk for vilkårlig n og at (1) holder. Da har vi at (h=>L/n/(h))=X og derfor ved hjelp av (2) at h=>L(h=>L/n/(h)). Siden vi forutsetter at h=>L(h) er tautologisk og alle punktene i h er normale følger da at h=>L(L/n/(h)) er tautologisk, ie. at h=>L/n+1/(h) er tautologisk.

Kan man slutte under de forutsetninger som er nevnt ovenfor at den følgende mengde er tautologisk: h => SN/k,0,∞/(L/k/(h)) ? Svaret på dette er bekreftende. Anta (3) xêh for vilkårlig x. Det vil være tilstrekkelig å bevise at

(4) (Ak)(kêNat –> xêL/k/(h))

Anta derfor at kêNat for vilkårlig k. Da har vi ifølge det som bløe vist ovenfor at h=> L/k/(h) er en tautologisk mengde. Dette innebærer at h Inkl L/k/(h). Siden xêh har vi da xêL/k/(h). Men k var et vilkårlig naturlig tall. Det følger at (4) holder.Vi har nå vist den følgende sats:

Teorem 4.7: Anta <X,N> er en begrenset modalfunksjon og at q er mengden av de normale punktene i denne funksjonen. Anta M(h) & ø≠h Inkl q og at:
(Ax)(xêh –> xêL(h))
(a) Da gjelder for alle nêNat at:
h=>L/n/(h) er en tautologisk mengde.
(b) Vi har også under disse forutsetninger at følgende mengde er tautologisk for alle kêNat:
h => SN/n,0,k/(L/n/(h))
(c) Det gjelder videre at h => SN/k,0,∞/(L/k/(h)) er en tautologisk mengde.

Dette teoremet har visse konsekvenser som det kan være av interesse å notere i forbindelse med de satsene vi beviste i §3. Ser man på Teorem 3.1 og føyer til som en forutsetning at (Ax)(xêh –> xêL(h)) følger det ved hjelp av satsen ovenfor at man kan ersatte alle forekomster av uttrykkene "SN/n,0,k/(L/n/(h))" og "SN/n,0,∞/(L/n/(h))" med h og fremdeles få en sats som holder. Tilsvarende bemerkninger gjelder også Teorem 3.2, Teorem 3.3 og Teorem 3.4.

I forbindelse med teoremet ovenfor er også den følgende sats av en interesse:

Teorem 4.8: Anta <X,N> er en begrenset modalfunksjon og at q er mengden av de normale punktene i denne funksjonen. Definer s ved:
s = SN/n,0,∞/(L/n/(q)).
Da har man: s Inkl L(s)

Bevis: Anta wês for en eller annen vilkårlig mulig verden w. Ved hjelp av definisjonen av s har man da:

(1) (An)(nêNat &n≥0 –> wêL/n/(q)). La n være et vilkårlig naturlig tall. Da har man åpenbart at n+1 er et naturlig tall >0. Fra dette og (1) følger derfor:

(2) (An)(nêNat &n≥0 –> wêL/n+1/(q)). Siden L/n+1/(q) = L(L/n/(q)) har man:
(3) (An)(nêNat &n≥0 –> wêL(L/n/(q))). Fra definisjonen av operasjonen L, nemlig L(a)= Mg(w: aêN(w)) følger at:

(4) (An)(nêNat &n≥0 –> L/n/(q)êN(w)). Dette i sin tur innebærer at:
(5) Mg(L/n/(q): n≥0) Inkl N(w). Men siden wês har vi wêq. Dette vil si at w er et normalt punkt i <X,N>. Men fra dette og (5) følger: SN/n,0,∞/(L/n/(q))êN(w). I lys av

definisjonen av s og operasjonen L kan man da slutte: wêL(s). Siden w var et vilkårlig element i s har vi derfor at s Inkl L(s). **Q.E.D.**

De teoremene som har blitt bevist ovenfor kan sies å belyse det gjensidige forhold mellom begrensede relasjonelle strukturer på den ene side og begrensede modalfunksjoner på den annen side. Vi skal nå formulere og bevise to satser som på et vis sammenfatter det vesentlige i det som så langt har blitt diskutert og som er av interesse for den teorien om tro og viten som vil bli fremstilt i Del II av dette arbeid.

Det første av disse teoremene er dette:

Teorem 4.9: Anta <X,R;1,R;2,Q> er et 4-tuple der R;1 og R;2 er relasjoner over Q og hvor Q er en ikke-tom mengde som er inkludert i X. Definer to modal-funksjoner N;1 og N;2 over X ved:

(i) aêN;1(w) <–> (Ay)(wR;1y –> yêa) om wêQ
N;1(w)= {{w}} om wêX–Q
(ii) aêN;2(w) <–> (Ay)(wR;2y –> yêa) om wêQ
N;2(w)= {{w}} om wêX–Q

Anta videre at L;1 og L;2 er henholdvis nødvendighetsoperatorene over N;1 og N;2, mao. at L;1 og L;2 er to funksjoner fra Pt(X) –> Pt(X) som er definert ved:

(iii) L;1(a) = Mg(w: aêN;1(w))
(iv) L;2(a) = Mg(w: aêN;2(w))

Anta endelig at man har:

(v) (Ax)(xêQ –> (Ey)(yêQ & xR;1y))
(vi) (Ax)Ay)(Az)(xR;1y & yR;1z –> xR;1z)
(vii) (Ax)(xêQ –> xR;2x)
(viii) (Ax)Ay)(Az)(xR;2y & yR;2z –> xR;2z)
(ix) R;1 Inkl R;2

Gitt disse forutsetningene har man:

(a) De N;1-normale punktene i X er Q
(b) De N;2-normale punktene i X er Q
(c) De følgende mengder er tautologiske:
(1) Q =>(L;1(a) => L;1(L;1(a)))
(2) Q =>(L;1(a) => –L;1(–a))
(3) Q => (L;2(a) => a)
(4) Q => (L;2(a) => L;2(L;2(a)))
(5) Q => (L;2(a) => L;1(a))
(6) Q => (L;1(Q) Ω L;2(Q))

Bevis: Denne satsen bevises lett ved hjelp av Teorem 4.5. Fra forutsetningene i satsen har man at <X,R;1,Q> er en begrenset relasjonell struktur. Den må også være normal siden man etter forutsetningene har at R;1 Inkl QXQ og dette innebærer at (Ax)(xêQ –>(xR;1y –> yêQ)). Fra dette, definisjonen av funksjonen N;1 og Teorem 4.5 følger det at de N;1- normale punktene i X er Q. Dette viser at punkt (a) i teoremet holder. På tilsvarende vis viser man at punkt (b) holder.

Fra forutsetningen om at R;1 er en seriell relasjon over Q følger videre, ved hjelp av Teorem 4.5, at ¬(øêN;1(x)) for alle xêQ, mao. (Ax)(xêQ –> ¬(øêN;1(x)). Antar man i så fall at det finnes y og aêPt(X) slik at (1) yêQ & aêN;1(y) & (–a)êN;1(y). Følger siden y er et normalt punkt at aΩ(–a)=øêN;1(y). Men dette er umulig. Følgelig må man ha (Ay)(yêQ –>

(aêN;1(y) –>¬((–a)êN;1(y))). Fra dette og definisjonen av L;1 følger at Q =>(L;1(a) => –L;1(–a)) er en tautologisk mengde. Dette viser at punkt (2) under (c) holder.

Fra forutsetningen om at R;1 er en transitiv relasjon følger ved hjelp av Teorem 4.5 at for alle xêQ og aêPt(X) at aêN;1(x) –> Mg(y: yêQ & aêN;1(y))êN;1(x) Herav følger så ved hjelp av definisjonen av operasjonen L;1 at
Q =>(L;1(a) => L;1(L;1(a))) er en tautologisk mengde. Dette viser at punkt (1) under (c) i teoremet holder. De andre punktene under (c) bevises på samme måte. **Q.E.D.**

Teorem 4.10: Anta <X,N;1>, <X,N;2> er to modalfunksjoner som oppfyller de følgende krav:

(i) De N;1-normale punktene i X er identisk med de N;2-normale punktene i X. De N;1-normale punktene i X er identisk med Q.
(ii) Følgende mengder er tautologiske for alle aêPt(X)
  (1) Q => (L;1(a) => L;1(L;1(a)))
  (2) Q => (L;1(a) => –L;1(–a))
  (3) Q => (L;2(a) => a)
  (4) Q => (L;2(a) => L;2(L;2(a)))
  (5) Q => (L;2(a) => L;1(a))
  (6) Q => (L;1(Q) Ω L;2(Q))
(iii) Definer to relasjoner, R;1 og R;2 over Q ved:
  R;1 = Mg(<x,y>: x,yêQ & yêSN(N;1(x)))
  R;2 = Mg(<x,y>: x,yêQ & yêSN(N;2(x)))

Gitt disse forutsetningene gjelder for alle wêQ og alle aêPt(X):

(a) wêL;1(a) <–> (Ay)(wR;1y –> yêa)
(b) wêL;1(a) <–> (Ay)(wR;1y –> yêa)
(c) (Ax)(xêQ –> (Ey)(yêQ & xR;1y))
(d) (Ax)Ay)(Az)(xR;1y & yR;1z –> xR;1z)
(e) (Ax)(xêQ –> xR;2x)
(f) (Ax)Ay)(Az)(xR;2y & yR;2z –> xR;2z)
(g) R;1 Inkl R;2

I den neste delen av dette arbeid skal vi anvende denne teorien om begrensede modalfunksjoner som vi nå skulle ha gitt leseren et bilde av ved konstruksjonen av en teori om tro og viten.

Del II

Viten og rasjonell tro.

§0 Innledning.

I Del I har vi vist hvordan utsagnsteorien T1 kan utvides slik at man får en noe mer omfattende teori som gjør det mulig å si noe mer om logisk nødvendig sanne utsagn. Det ble angitt to mulige utvidelser av T1: den relasjonelle teorien om logisk nødvendighet og utsagnsteorien om logisk nødvendighet. Disse to teoriene ble utviklet i detalj ved at vi innførte to klasser av strukturer, de relasjonelle strukturene og klassen av modalfunksjoner. En lang rekke teoremer ble så vist om nødvendighets og mulighetsoperatorene i henholdvis de relasjonelle strukturene og modalfunksjonene. I tillegg ble det bevist en rekke satser som viser detaljert sammenhengen mellom de to typene av strukturer. Samlet gir derfor de teoremene som ble bevist i §2 og §3 et forholdsvis fyldig, om enn forholdsvis elementært, bilde av hva som kan utledes i henholdsvis den relajonelle teorien om logisk nødvendighet og utsagnsteorien om logisk nødvendighet. Det bør understrekes at det var dette og intet annet som var målet med denne delen av dette arbeidet.

I §3 ble begrepet modalfunksjon generalisert ved at vi innførte begrepet begrenset modalfunksjon. En rekke satser om mulighets og nødvendighets-operatorene i begrensede modalfunksjoner ble så bevist. Disse satsene kan oppfattes som generaliseringer av de tilsvarende satser som i §2 ble bevist om modalfunksjoner. På samme måte ble det i §4 innført en mer omfattende klasse med relasjonelle strukturer, de begrensede relasjonelle strukturer. Også i denne sammenheng ble det nevnt en lang rekke satser som gjelder for dem og som er helt analoge med de tilsvarende satser for relasjonelle strukturer. Ogå disse satsene om begrensede relasjonelle strukturer kan oppfattes som generaliseringer av de tilsvarende satser om relasjonelle strukturer. I denne paragrafen ble det også bevist visse satser som viser sammenhengen mellom en spesiell klasse av begrensede modalfunksjoner, de såkalte normale begrensede modalfunksjoner, og en tilsvarende mengde av begrensede relasjonelle strukturer, de normale relasjonelle strukturer.

I denne delen av dette arbeidet skal vi beskrive og delvis utarbeide en generell og mer formal teori om tro og viten. Teorien har et formalt, logisk preg i det den ikke sier noe direkte og konkret om hva en person faktisk vet og tror ved forskjellige tidspunkter, men bare sier noe om hva man kan slutte at en person tror og vet under visse ideelle betingelser gitt visse premisser om hva personen forøvrig tror og vet. Forøvrig er også denne teorien, på samme måte som de teoriene som ellers har blitt studert en utvidelse av teorien om presise deskriptive utsagn, T1.

Grunnbegrepene i teorien er de to relasjonene "y er noe x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w" og "y er noe x vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w" ved siden av de grunnbegrepene som inngår i T1 og visse andre som vi straks skal komme inn på.

Det første spørsmålet som oppstår i forbindelse med disse to relasjonene er spørsmålet om hva som er objektet for tro og viten. Hvis y er noe x tror er tilfelle ved et gitt tidspunkt t, hva er da y? Noe som det kan forekomme en rimelig å hevde er at y må være en størrelse som har utsagnskarakter. Dette innebærer tre ting. For det første at det dreier seg om en størrelse som ikke er rent språkelig. For det andre at det dreier seg om en størrelse som, gitt en vilkårlig mulig verden w, enten er sann i denne verdenen w eller usann i den. For det tredje virker det rimelig å tenke seg at hvis s er en helt presis meningsfull setning i et eller annet språk L uttrykker denne noe som i prinsippet kan være objekt for tro eller viten. En fjerde ting virker det også rimelig å si om de ting som eventuelt kan være objekter for tro og viten. Er s;1 en presis deskriptiv setning som uttrykker noe en person tror ved et gitt tidspunkt er det ikke logisk sett nødvendig at enhver setning som er logisk ekvivalent med s;1 uttrykker noe personen tror ved det gitte tidspunkt. Dette innebærer at den type størrelser som kan være objekter for tro, viten og andre intensjonale relasjoner av epistemisk og psykologisk art ikke er identiske med det vi kaller for presise deskriptive utsagn, eller kortere for utsagn. I det følgende vil denne typen av objekter bli kalt for *finstrukturerte utsagn*.

La oss nå forutsette at vi har for oss et intepretert første-ordens språk L[2]. Klassen av alle setninger i dette språket betegner vi med Setn(L). I teorien vil det bli stilltiende forutsatt at enhver setning i dette språket vil uttrykke et finstrukturert utsagn. Funksjonen som tilordner hver setning i L det finstrukturerte utsagn det uttrykker betegner vi med h. Klassen av alle de finstrukturerte utsagn betegner vi med fU. Det er da slik at h: Setn(L) –> fU, mao. avbilder h mengden av setninger i L inn i fU. Det er ikke noe spesielt som taler til fordel for at h nødvendigvis behøver å avbilde Setn(L) på fU.

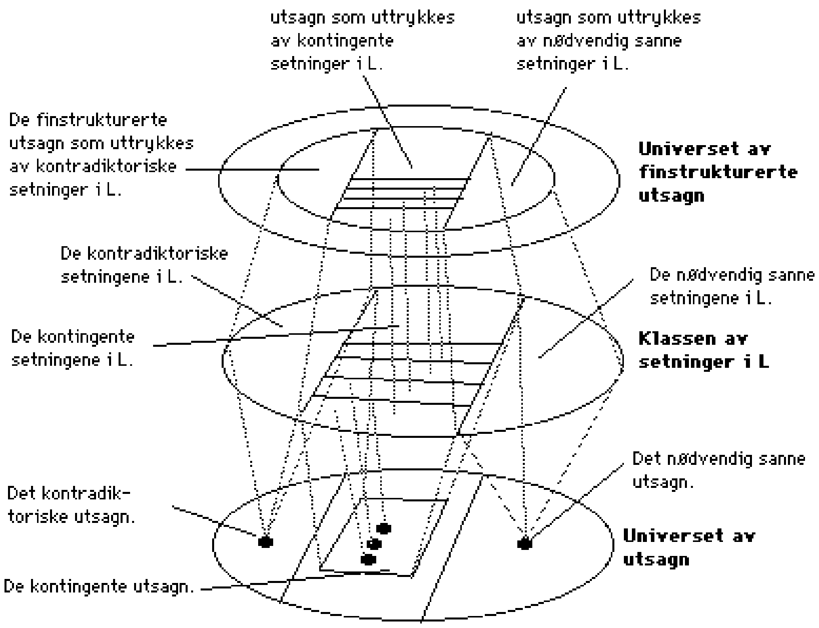
I et intepretert første ordens-språk kan setningene inndeles i tre hovedklasser: de setningene som er nødvendig sanne i L, de setningene som er nødvendig usanne, dvs. de kontradiktoriske setningene i L og endelig de setningene i L som hverken er kontradiktoriske eller nødvendig sanne, de kontingente setningene i L. Videre vil det være slik at enhver setning i et intepretert første-ordens språk uttrykker et entydig presist deskriptivt utsagn. Den funksjonen som til hver setning s i L tilordner setningen det utsagn som den uttrykker betegner vi akkurat her med g. Vi har da at g : Setn(L) –> U. To setninger i L kalles logisk ekvivalente om de uttrykker det samme utsagn. Gitt denne definisjonen av logisk ekvivalens er det lett å se at logisk ekvivalens er en ekvivalensrelasjon over Setn(L) som inndeler denne mengden i innbyrdes disjunkte ekvivalensklasser som samlet utømmer den. Det følger også at alle de nødvendig sanne setningene hører med i samme ekvivalensklasse og at de derfor uttrykker det samme utsagn. Det samme gjelder de kontradiktoriske utsagnene i L. I det følgende kaller vi alle de setninger i L som er logisk ekvivalente med en gitt setning for en logisk ekvivalensmengde i L

La oss kalle to setninger i L som uttrykker det samme finstrukturerte utsagn for h-ekvivalente, siden vi bruker "h" for å betegne den funksjonen som til en setning s i L tilordner s det finstrukturerte utsagn som s uttrykker. Mao. vil da to setninger s;1,s;2 i L være h-ekvivalente hvis og bare hvis h(s;1)=h(s;2). Når det gjelder funksjonene h og g vil det være rimelig å kreve at hvis to setninger i L er h-ekvivalente så må de også være logisk ekvivalente. Dette innebærer at enhver logisk ekvivalensmengde i L vil inndeles i finere h-ekvivalensmengder

---

[2] For en presis definisjon av hva vi her forstår med et intepretert første-ordens språk henvises til Appendiks III i Rognes [4].

Illustrasjon:


De finstrukturerte utsagn som uttrykkes av kontingente setninger i L.
De finstrukturerte utsagn som uttrykkes av nødvendig sanne setninger i L.
De finstrukturerte utsagn som uttrykkes av kontradiktoriske setninger i L.
Universet av finstrukturerte utsagn
De kontradiktoriske setningene i L.
De nødvendig sanne setningene i L.
De kontingente setningene i L.
Klassen av setninger i L
Det nødvendig sanne utsagn.
Det kontradiktoriske utsagn.
Universet av utsagn
De kontingente utsagn.

som innbyrdes selvfølgelig ikke har felles elementer, men som samlet inneholder alle elementene i den logiske ekvivalensmengde.

Figuren på forrige side er ment å gi en illustrasjon til de forhold som er nevnt så langt. Som man ser er figuren delt i tre deler. Punktene innenfor den største av de øverste sirklene er ment å representere klassen av absolutt alle de finstrukturerte utsagnene, mao. universet av finstrukturerte utsagn. Punktene innenfor den nest øverste sirkelen er det meningen at skal representere alle de enkelte setnigene i det intepreterte første-ordens språket L. Som man ser er denne sirkelen inndelt i tre områder. Klassen av punkter innenfor den delen som ligger til venstre representerer de kontradiktoriske utsagnene i L, de i midten representerer de kontingente setningene i L og punktene innenfor delen til høyre representerer de nødvendig sanne setningene i L. Mengden av de finstrukturerte utsagnene som funksjonen h tilordner setningene i L er anskueliggjort ved en sirkel som ligger innenfor den øverste, ytterste, sirkelen. Denne er delt i tre tilsvarende arealer, på samme måte som sirkelen som representerer setningene i L. Til venstre befinner de finstrukturerte utsagnene seg som uttrykkes av kontradiktoriske setninger i L, i midten dem som uttrykkes av kontingente setninger og til høyre dem som uttrykkes av de logisk nødvendig sanne setningene i L. Punktene innenfor sirkelen nederst på figuren representerer mengden av utsagn. Også denne sirkelen er delt i tre arealer. Det til venstre representerer det kontradiktoriske utsagn og det til høyre det nødvendig sanne utsagn. Feltet i midten representerer de logisk sett kontingente utsagn. Et mindre felt innenfor det i midten representerer de kontingente utsagn som uttrykkes av setningene i L. Til hvert utsagn svarer en mengde med setninger i L som er logisk ekvivalente og som uttrykker dette utsagn. Vi antar derfor ikke at g"(Setn(L)) = U, men snarere at g"(Setn(L)) Inkl U. Et tilsvarende forhold gjør seg gjeldende når det gjelder forholdet mellom setningene i L og klassen av de finstrukturerte utsagn. Det antas ikke at h"(Setn(L)) = fU, men bare at h"(Setn(L)) Inkl fU.

Vi har nå sett på endel prinsipper som vil inngå i teorien når det gjelder det vi her kaller for finstrukturerte utsagn. I de to neste paragrafene vil disse forutsetningene bli formulert mer presist og eksplisitt. Hvilke grunnprinsipper om relasjonene tro og viten vil bli lagt til grunn i det følgende? Hovedsakelig er det de følgende: For det første vil det bli antatt at hvis y er noe som x tror eller vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w så er y et finstrukturert utsagn, t et tidspunkt og w selvfølgelig en logisk mulig verden. For det andre vil det bli forutsatt at hvis y er noe x ved tidspunktet t vet er tilfelle i verdenen w så er y også noe x tror er tilfelle ved t i denne verdenen w. Dette innebærer at teorien impliserer at kunnskap eller viten impliserer tro. Det tredje prinsipp som inngår i teorien er at dersom y er noe x vet ved tidspunktet t i verdenen w så er y et finstrukturert utsagn som er sant i verdenen w.

I de de neste paragrafene vil det bli gitt en rigorøs definisjon av den teorien som vi nå har antydet visse trekk ved. Først vil språket til teorien bli spesifisert, dernest vil vi angi de ikke-logiske aksiomene i den.

§1 Språket til teorien.

Språket til den teorien om tro og viten som nå vil bli definert er en utvidelse av språket til teorien T1 som ble beskrevet og definert utførlig i Rognes [2]. Vi forutsetter at leseren nå er fullt fortrolig med dette.

Det ikke-logiske vokabularet til dette språket består, i tillegg til medlemskapspredikatet "x er et element i mengden y" og predikatet "x er en mengde", av de følgende konstruksjoner:[3]

(1) "x er en logisk mulig verden ". Denne konstruksjonen forkortes med "MV(x)".
(2) "x er et presist deskriptivt utsagn". Denne konstruksjonen forkortes med "Ut(x)".
(3) "w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant". Når det gjelder denne konstruksjonen benyttes uttrykket "True(w,x)" som forkortelse.

Kalles mengden som inneholder nøyaktig konstruksjonene (1) - (3), og bare dem, for Δ;0, er språket til teorien T1 språket for mengdelære,L;e, utvidet med konstruksjonene i mengden Δ;0 som nye ikke-logiske konstruksjoner. Uttrykket "L;e[Δ;0]" betegner dette språket.

Det ble nevnt ovenfor at vi i den teorien om tro og viten som vil bli definert vil anta at det finnes visse entiteter som vi her kaller for finstrukturerte utsagn. For å kunne si noe om disse størrelsene skal vi nå utvide språket L;e[Δ;0] med de følgende ikke-logiske predikater:

(4) "x er et finstrukturert utsagn" Dette forkortes med "U;f(x)"
(5) "w er en mulig verden hvor det finstrukturerte utsagnet x er sant" Dette uttrykket forkortes med "True;f(w,x)"

---

[3] En nøyaktig definisjon av hva som her menes med en konstruksjon er gitt i Rognes[1],§2 og §2.1 - §2.4. I det vesentlige er en n-ær konstruksjon en funksjon som til ethvert n-tuple av uttrykk tilordner et uttrykk. Med et uttrykk forstår vi da en endelig sekvens av tegn hvor tegnene er de store og små bokstaver i det norske alfabet, komma-, punktum-, og apostrofftegnet, samt tegnene for høyre - og venstre-håndsparantes og et tegn for åpen plass. Uttrykket "x er en mulig verden" kan da oppfattes som en konstruksjon i denne forstand siden vi alltid får et nytt uttrykk hver gang vi setter inn et vilkårlig uttrykk for tegnet "x".

Selvom tidsforhold ikke spiller noen avgjørende rolle i teorien er det likevel av interesse å utvide språket med visse predikater som gjør det mulig å si noe om slike forhold. Det man tror er tilfelle ved et gitt tidspunkt behøver ikke være det samme som det man tror ved et senere eller tidligere tidspunkt. Det samme gjelder viten. Klassen av de ting man vet og klassen av de de ting man tror kan altså endre seg med tiden. For å kunne uttrykke slike forhold inkluderes de følgende "tidsteoretiske" predikatene i språket:

(6) "x er et tidspunkt ". Denne konstruksjonen forkortes med "Tp(x)".
(7) "Tidspunktet x kommer før tidspunktet y". Denne konstruksjonen forkortes med "x <;f y".

Endelig er det klart at vi må få med oss de to predikatene "y er noe x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w" og "y er noe x vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w":

(8) "y er noe x vet er riktig ved tidspunktet t i verdenen w". Når det gjelder denne konstruksjonen benyttes uttrykket "Vet;w(y,x,t)" som forkortelse.
(9) "y er noe x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w". Når det gjelder denne konstruksjonen benyttes uttrykket "Tror;w(y,x,t)" som forkortelse.

La oss kalle den mengden med konstruksjoner man får når Δ;0 utvides med konstruksjonene (4) – (9) for ∏. Det språket som legges til grunn i det følgende er da språket for mengdelære, det vil si L;e, utvidet med alle konstruksjonene i ∏, og bare dem, som nye ikke-logiske predikater. Dette nye språket betegnes med L;e[∏]. I teorien trenger man ikke flere ikke-logiske predikater enn dette i tillegg til dem som inngår i T;1.

Dermed har det blitt gitt en nøyaktig definisjon av språket til teorien.

§2 Aksiomer i teorien.

Siden språket til teorien nå er fiksert gjenstår det strengt tatt bare å gjøre rede for hvilke ikke-logiske aksiomer som inngår i den. Dette er alle de aksiomene som inngår i T1 med tillegg av de som det nå etterhvert vil bli gjort rede for.

Når det gjelder de to første predikatene på denne listen nevnes at det her tas for gitt at mengden av alle tidspunkter er en mengde, at den er ikke-tom og at før-relasjonen mellom tidspunkter er en relasjon over mengden av alle tidspunkter. Disse antagelsene kan formaliseres slik:

Ax1 M(Mg(x;Tp(x)) & Mg(x: Tp(x)) ≠ ø
Ax2 (Ax)(Ay)(x<;f y –>. Tp(x) & Tp(y))

I dette arbeidet skal vi ikke detaljert diskutere tidslogiske forhold. Men i det følgende vil det bli antatt, som en ren arbeidshypotese, at før-relasjonen over mengden av tidspunkter er lineær, tett og uendelig i begge retninger:

Ax 2.1 x<;f y & y<;f z –> x<;f z
Ax 2.2 x<;f y –> ¬(y<;f x)
Ax 2.3 Tp(x) & Tp(y) –> (x<;f y v x=y v y<;f x)

Ax 2.4 x<;f y –> (Ez)(Tp(z) & x<;f z & z<;f y)
Ax 2.5 Tp(x) –> (Ey)(Tp(y) & x<;f y)
Ax 2.6 Tp(x) –> (Ey)(Tp(y) & y<;f x)

Klassen av finstrukturerte utsagn betegnes med "fU". Dette uttrykket er definert slik:

Definisjon 2.1 fU= Mg(x: U;f(x))

Når det gjelder finstrukturerte utsagn betraktes de følgende setninger:

Ax3 (Aa)[M(a) & a Inkl I –>
(Ey)(yêfU & (Aw)(wêI –> (wêa <–> True;f(w,y))))]

Ax4 yêfU –> (Ea)(M(a) & a Inkl I & (Aw)(wêa <–> True;f(w,y)))

Den første av disse setningene uttrykker at om a er en mengde med mulige verdener finnes det et finstrukturert utsagn som er sant i nøyaktig de og bare de verdenene som er med i a. Den andre setningen sier at hvis y er et finstrukturert utsagn så finnes en mengde a av mulige verdener som utgjør nøyaktig mengden av de mulige verdenene hvor utsagnet y er sant.

I tillegg til disse to setningene tar vi også med det følgende som sier at hvis w er en mulig verden hvor det finstrukturerte utsagn y er sant er y et finstrukturert utsagn og w en mulig verden. Dette uttrykkes av den følgende setning:

Ax5 True;f(w,y) –> yêfU & wêI

Dette aksiomet er naturligvis av en temmelig triviell karakter. At mengden av mulige verdener er minst tellbart uendelig kan uttrykkes ved den følgende formel:

(3) Cd(I) ≥ Aleph;0.

Fra dette følger at Pt(I) må være minst likemektig med mengden av de reelle tall. Sammen med (1) impliserer dette at mengden av finstrukturerte utsagn er minst likemektig med mengden av de reelle tall. Det bør også bemerkes at det ikke er noe i aksiomene ovenfor som direkte tilsier at klassen av de finstrukturerte utsagn finnes. Vi skal la dette stå åpent. Visse overveielser kan gjøre det rimelig å tro at klassen av de finstrukturerte utsagn er så rik og omfattende at den ikke kan eksistere i det kumulative hierarki. Hvis vi tenker oss f.eks. at alle setningene i ethvert første-ordens språk, tellbart, såvel som overtellbart, utrykker forskjellige finstrukturerte utsagn og det godt kan finnes ubegrenset mange språk av denne type der de finstrukturerte utsagn som uttrykkes av setningene i et av disse språkene ikke er blandt dem som kan uttrykkes i noen av de andre er det nærliggende å tenke seg at denne klassen med utsagn ikke eksisterer. Det er nemlig lett å vise at klassen av alle intepreterte første-ordens språk i den betydning som dette uttrykk brukes her ikke er en mengde, dvs. ikke eksisterer i det kumulative hierarki.

Sannhetsmengden til et finstrukturert utsagn y betegner vi med "s;f(y)". Uttrykket er formelt sett definert ved:

Definisjon 2.2 s;f(y) = Mg(w: wêI &True;f(w,y))

To finstrukturerte utsagn som har den samme sannhetsmengde kalles for f-ekvivalente. Vi legger ikke til noen aksiomer som sier noe om hvor mange finstrukturerte utsagn som eventuelt kan være ekvivalente med et oppgitt slikt utsagn.

Det følgende aksiom for relasjonene Tror og Vet vil bli tatt for gitt i det følgende. Det er, som man skjønner, temmelig svakt.

Ax6 Tror;w(y,x,t) v Vet;w(y,x,t).–> (yêfU & têT &wêI)

Uttrykket "Tror;w(y,x,t)" leses "y er noe x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w". Som nevnt leses uttrykket "Vet;w(y,x,t)" som " y er noe x vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w". Ax3 uttrykker da den påstand at om y er noe x enten tror eller vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w så er y et finstrukturert utsagn, t er et tidspunkt og w en logisk mulig verden. Dette aksiomet synes åpenbart å være i overenstemmelse med det som ble nevnt §0.
Når det gjelder andre antagelser om tro og viten skal vi bare, i selve teorien, ta med de følgende to som sier (a) at dersom y er noe x vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w så er y også noe x tror er tilfelle ved t i verdenen w og (b) at dersom y er noe x vet er tilfelle i verdenen w så er y et finstrukturert utsagn som er sant i verdenen w:

Ax7 Vet;w(y,x,t) –> Tror;w(y,x,t)
Ax8 Vet;w(y,x,t) –> True;f(w,y)

Vi skal også inkludere det følgende aksiom som rett og slett sier at mengden av alle de tripler <y,x,t> som oppfyller betingelsen Tror;w(y,x,t) er en mengde for enhver mulig verden w. Dette aksiomet kan formuleres slik:

Ax9 (Aw)(wêI &têT –> (Ey)(M(y) & y = Mg(<y,x,t>: Tror;w(y,x,t)))

Dette aksiomet impliserer også at klassen av alle de tripler <y,x,t> som oppfyller betingelsen Vet;w(y,x,t) også er en mengde.

Dette avslutter listen over nye ikke-logiske aksiomer. Den teorien vi nå vil arbeide med kan derfor defineres som den første-ordens teorien hvor språket er L;e[∏∏] og hvor de ikke-logiske aksiomene er, for det første alle ZFCu-aksiomene i L;e[∏∏], for det andre alle T1-aksiomene i L;e[∏∏], og for det tredje alle aksiomene Ax1 – Ax9 som har blitt nevnt ovenfor. Det kan være hensiktsmessig å ha et kort og ikke-teknisk navn på denne teorien. I det følgende vil den bli kalt for *teorien om tro og viten*.[4]

§3 Relasjonen Tror og begrepet trosfelt.

Det er særlig to begreper som er viktige i teorien om tro og viten og som vil spille en stor rolle i det følgende. Det dreier seg på den ene side om det som vi vil kalle for trosfeltet til en person ved et gitt tidspunkt t i den mulige verden w, og det tilsvarende begrep om kunnskapsfeltet til en person. Trosfeltet til en person x ved tidspunktet t i verdenen w, Tr;w(x,t) er definert ved:

---

[4] Man bør kanskje nevne at hverken utsagnsteorien om logisk nødvendighet eller den relasjonelle teorien om logisk nødvendighet som ble beskrevet i Del I strengt tatt er noen del av teorien om tro og viten. Dette kommer av at hverken predikatet "Nec(x,w)" eller predikatet "xRy" er med i språket til den sistnevnte teori.

Definisjon 3.1 Tr;w(x,t) = Mg(y: yêfU & Tror;w(y,x,t))

Fra denne definisjonen fremgår det at trosfeltet til en person er en klasse av finstrukturerte utsagn. Vi definerer Tr*;w(x,t) ved:

Definisjon 3.2 Tr*;w(x,t) = Mg(y: yêU & (Ez)(zêTr;w(x,t) & s(y)=s;f(z)))

Det fremgår av definisjonene at Tr*;w(x,t) er en mengde av utsagn, mens selve trosfeltet til en person er en mengde med finstrukturerte utsagn. Det er mulig å forenkle noe her og arbeide direkte med mengder av mulige verdener i stedet for utsagn. Som det fremgår av det som tidligere har blitt skrevet er det en en-entydig korrespondanse mellom utsagn og mengder av mulige verdener. Dette følger temmelig direkte fra teorien om presise deskriptive utsagn. I tillegg til (2) kan man derfor også betrakte:

Definisjon 3.3 Tr@;w(x,t) = Mg(y: yêPt(I) &(Ez)(zêTr;w(x,t) & y=s;f(z)))

Man kunne kalle Tr@;w(x,t), selvom navnet ikke er spesielt suggestivt, for "det grovstrukturerte trosfeltet til x ved tidspunktet t i verdenen w". Som det fremgår fra denne definisjonen er Tr@;w(x,t) mengden av alle de mengder av mulige verdener a som er slik at a er sannhetsmengden til et eller annet finstruturert utsagn som beskriver noe x tror ved tidspunktet t i verdenen w.

Når det gjelder relasjonen Vet, kan man innføre helt tilsvarende begrepsdannelser. Kunnskapsfeltet til en person x ved tidspunktet t i en logisk mulig verden w er rett og slett klassen av alle de finstrukturerte utsagn som x vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w. Vi betegner dette med "Vt;w(x,t)" og definerer det i analogi med "Tr;w(x,t)" på den følgende måte:

Definisjon 3.4 Vt;w(x,t) = Mg(y: yêfU & Vet;w(y,x,t))

På tilsvarende måte som ved tro kan vi nå betrakte klassen av alle de utsagn som er slik at det finnes et finstrukturert utsagn med samme sannhetsmengde som x vet tidspunktet t vet er tilfelle i verdenen w. Denne mengden av utsagn betegner vi med "Vt*;w(x,t)" og definerer denne slik:

Definisjon 3.5 Vt*;w(x,t) = Mg(y: yêU & (Ez)(zêVt;w(x,t) & s(y)=s;f(z)))

Det "grovstrukturerte" kunnskapsfeltet til x ved t i verdenen w betegner vi med "Vt@;w(x,t)". Dette er mengden av alle sannhetsmengdene til de utsagn som inngår i kunnskapsfeltet til x ved tidspunktet t i verdenen w:

Definisjon 3.6 Vt@;w(x,t) = Mg(y: yêPt(I) &(Ez)(zêVt;w(x,t) & y=s;f(z)))

Studerer man de definisjonene vi har gitt ovenfor skulle det være lett å se at i teorien om tro og viten er kunnskapsfeltet til x ved t i verdenen w inkludert i trosfeltet til x ved t i verdenen w. Det samme gjelder de andre "feltene" som har blitt definert ovenfor. Dette kan sammenfattes i det følgende, meget enkle og trivielle teorem:

Teorem 3.1 (a) Vt;w(x,t) Inkl Tr;w(x,t)

(b) Vt*;w(x,t) Inkl Tr*;w(x,t)
(c) Vt@;w(x,t) Inkl Tr@;w(x,t)
(d) Vt;w(x,t) Inkl Mg(y: True;f(y,w))
(e) Vt*;w(x,t) Inkl Mg(y: True(y,w))
(f) Vt@;w(x,t) Inkl Mg(y: yêPt(I) &wêy)

Bevis: Dette bevises lett ved hjelp av Definisjon 3.1 – 3.6, samt Ax5 – Ax8. **Q.E.D.**

§3.1 Noen bemerkninger om trosfeltet til en person.

I språket til den teorien som har blitt beskrevet ovenfor inngår visse predikater som gjør det mulig å uttrykke påstander som har med tidsforhold og tidspunkter å gjøre. Det er derfor mulig å si noe om hvordan en persons trosfelt kan endre seg med tiden innenfor rammen av teoriens språk. F. eks. kan man uttrykke en påstand om at trosfeltet til en person x ikke endrer seg i et tidsintervall som starter ved tidspunktet t;1 og har tidspunktet t;2 som sluttpunkt. Videre er det mulig å uttrykke en påstand om at trosfeltet til en person har en fast kjerne av trosoppfatninger i et visst tidsintervall. Det er også mulig å uttrykke at trosfeltet til en person akkumumeleres over et visst tidsrom, dvs. at ved hvert tidspunkt i tidsrommet vil trosfeltet inneholde alle de utsagn som inngikk ved tidligere tidspunkter i tidsrommet. Mao. er det er mulig å uttrykke hva det vil si at trofeltet til en person er monotont økende eller hva det vil si at trosfeltet til en person er strengt monotont økende i et visst tidsintervall. En lang rekke andre ting kan nevnes i denne forbindelse. Det er viktig at leseren selv på dette punkt tenker seg om å reflekterer over hvilke muligheter teorien har på dette punkt.

Det bør understrekes at det som her kalles trosfeltet til en person, og som er mengden av alle de finstrukturerte utsagn som beskriver forhold personen tror er tilfelle, er meget nært relatert til det som andre kaller for horisonten til en person. Imidlertid skal vi ikke her begi oss inn på mer omstendelige studier av hvordan de to begrepene er relatert til hverandre. Vi begrenser oss her bare til å nevne de følgende momenter i forbindelse med trosfelt-begrepet. (a) For det første vil det normalt være svært mange trosoppfatninger som inngår i en persons trosfelt. Av disse vil en stor del omfattes av de mer eller midre systematiske oppfatninger som personen har om den ytre fysiske verdens objekter. En annen stor del av trosfeltet vil være alle de oppfatninger som personen har om sin egen bakgrunn, opprinnelse, erfaringer, evner osv. En tredje del vil være helheten av alle de oppfatninger om andre mennesker som personen har, og om de relasjoner vedkommende har til dem. En fjerde viktig helhet av oppfatninger som inngår i trosfeltet til en person vil være de verdioppfatninger og moralske oppfatninger som vedkommende har. Sammenfattende kan man si at kort sagt alt det man har opplevd, lært og tilegnet seg av kunnskaper er deler av ens trosfelt. (b) Det andre moment som skal nevnes er det følgende: Det vil ved ethvert tidspunkt bare være et lite utsnitt av de trosoppfatningene som inngår i ens trosfelt som man har oppmerksomheten aktivt rettet mot. Jeg tror selvfølgelig at 3x7=21, men da jeg skrev forrige side tenkte jeg ikke på at dette er tilfelle. Jeg tror at en rekke personer vil svare bekreftende om man spør dem om jorden er kuleformet, men heller ikke dette var fremme i min bevissthet da jeg arbeidet med de tanker som er uttrykt på den foregående siden i dette arbeidet.

§4 Deduktivt lukkede mengder av finstrukturerte utsagn.

I teorien som vi så langt har beskrevet er det intet som implierer at tros- eller kunnskapsfeltet til et individ x er lukket under logisk konsekvens. Dette er forsåvidt rimelig siden det ikke er realistisk å tro at noe individ som vet at en viss påstand er riktig nødvendigvis vet enhver påstand som følger fra den. Det samme gjelder også tro. Heller er det ikke noe som utelukker at trosfeltet til et individ kan være inkonsistent. Det er fullt forenelig med teorien at det kan finnes en person x hvor trosfeltet ved et bestemt tidspunktet både inneholder et utsagn x og negasjonen av x. Dette forhindrer imidlertid ikke at det kan være interessant å studere hva som gjelder hvis man antar at tros- og kunnskapsfeltet til en person er lukket under logisk konsekvens og at det eventuelt er konsistent. Selvom det faktisk sett aldri er slik at disse to betingelser er oppfylt virker det ikke urimelig å si at man bør strebe etter at de blir oppfylt i så stor grad som mulig.

I det følgende vil vi derfor først definere mer presist hva som her skal forstås med en deduktivt lukket mengde av finstrukturerte utsagn. Dernest vil det bli undersøkt nærmere hva som følger om man antar at tros- og kunnskapsfeltet til en person er deduktivt lukket ved tidspunktet t i verdenen w.

Definisjon 4.1 Anta ΔêPt(fU). Da kalles Δ for deduktivt lukket mengde av finstrukturerte utsagn, "DCL;f(Δ)", hvis og bare hvis mengden oppfyller de følgende krav:
(i) (Ax)(xêPt(Δ)& x≠ø –>
(Ay)(yêfU & s;f(y)=Mg(w: wêI &
(Az)(zêx–> True;f(w,z))) –> yêΔ))
(ii) (Ax)(xêΔ -> (Ay)(yêfU & s;f(x) Inkl s;f(y) –> yêΔ)
(iii) (Ay)(yêfU &s;f(y)=I –> yêΔ)

Kravet (i) innebærer at hvis x er en ikke-tom delmengde av Δ og y er et finstrukturert utsagn der sannhetsmengden er klassen av nøyaktig de mulige verdner hvor alle utsagnene i x er sanne, så er også y med i mengden Δ. Kravet (ii) innebærer at om sannhetsmengden til x inkluderer den til y og x er med i Δ så er y det også, forutsatt at x og y er finstrukturerte utsagn. Kravet (iii) innebærer at om y er et finstrukturert utsagn der sannhetsmengden er I så er y med i Δ.

En mengde av finstrukturerte utsagn som er deduktivt lukket i denne forstand er ikke nødvendigvis konsistent. Man kan kalle et finstrukturert utsagn x for kontradiktorisk om s;f(x)=ø. Betrakter man i så fall klassen av alle finstrukturerte utsagn y der s;f(x) Inkl s;f(y) vil denne mengden omfatte alle finstrukturerte utsagn. Denne mengden vil også oppfylle kravene ovenfor. Den er derfor deduktivt lukket. Imidlertid er den inkonsistent i den forstand at det ikke finnes noen verden der alle utsagnene som inngår i den er sanne.

Det bør bemerkes at hvis x og y er finstrukturerte utsagn og sannhetsmengden til x er inkludert i sannhetsmengden til y, dvs. hvis s;f(x) Inkl s;f(y) så er det slik at utsagnet x kan sies å implisere utsagnet y. Er nemlig s;f(x) Inkl s;f(y) vil det ikke finnes noen mulig verden der utsagnet x er sant og utsagnet y er usant. Man kan da slutte at y må være tilfelle om x er det og dette er, intuitivt sett, nøyaktig det samme som å si at x impliserer y.

I den definisjonen som er gitt ovenfor svarer også kravene (i) – (iii) til de tilsvarende krav i definisjonen modalfunksjon og i definisjonen av normalt punkt i en begrenset modalfunksjon <X,N>. Man bør også notere at kravene (i) og (ii) ovenfor kan sammenfattes i ett, nemlig:

(+) [xêPt(Δ) & x≠ø & yêfU &
Mg(w: wêI & (Az)(zêx –> True;f(w,z))) Inkl s;f(y)] –> yêΔ

Denne setningen sier at om sannhetsmengden til snittet av de ymse elementer i Pt(Δ) er inkludert i sannhetsmengden til y så er y selv med i Δ. Definisjonen ovenfor kan også ytterligere forenkles. Man ser for eksempel at kravet (iii) er ekvivalent med at Δ≠ø. For inneholder Δ et eller annet utsagn z vil vi jo ifølge (ii) nødvendigvis ha, om yêfU & s;f(y)=I at s;f(z) Inkl s;f(y) og derfor at yêΔ. På den annen side er det også klart at kravet (iii) i definisjonen ovenfor impliserer at Δ≠ø. For i følge aksiom Ax3 vil det jo til enhver mengde med mulige verdener alltid finnes et finstrukturert utsagn som har denne muligverdensmengden som sin sannhetsmengde. Siden IêPt(I) følger at det finnes z der zêfU & s;f(z)=I. Dette og kravet (iii) impliserer åpenbart at Δ≠ø.

Endelig skulle det være mulig å se, om man studerer (+) litt nærmere at man får et krav som er ekvivalent med konjunkjonen av (i) – (iii) om man i (+) søyfer uttrykket "x≠ø". For er x=ø ser man at

Mg(w: wêI & (Az)(zêx –> True;f(w,z)))=I. Det følger da ved hjelp av (+) at (Ay)(I Inkl s;f(y) &yêfU –> yêΔ), siden x=øêPt(Δ). Men siden s;f(y) Inkl I om yêfU, har man da at (Ay)(yêfU & s;f(y)=I. –> yêΔ). Dette er nettopp kravet (iii).

Er X en mengde med mulige verdener er teorien ovenfor fullt ut forenelig med den påstand at det kan finnes overtellbart mange finstrukturerte utsagn som kan ha X som sin sannhetsmengde.

Er L et tellbart intepretert førsteordens språk og S en setning i dette språk, ville alle de setninger i L som er logisk ekvivalente med S utrykke det samme utsagn. Det vil også være slik at mengden av setninger som er logisk ekvivalente med S vil være tellbart uendelig. Tenker man seg at forskjellige setninger i L som er logisk ekvivalente alltid uttrykker forskjellige finstrukturerte utsagn følger det at om X er sannhetsmengden til det utsagn som uttrykkes av en setning S i L så vil det finnes tellbart uendelig mange finstrukturerte utsagn som har X som sin sannhetsmengde. Hvis man derfor tenker seg et meget "finmasket" individuasjonskriterium for finstrukturerte utsagn vil det i en viss forstand være rimelig å si at det finnes langt "flere" finstrukturerte utsagn enn utsagn.

På dette punkt vil vi nevne at det ikke er hensikten å ta opp spørsmål om den ontologiske status til slike entiteter som mengder, utsagn, mulige verdener, finstrukturerte utsagn osv. til drøfting i dette arbeidet. Det vil derfor ikke bli tatt noen stilling til hvorvidt de nevnte entiteter f. eks. eksisterer uavhengig av bevisstheten, hvorvidt de er skapt av bevisstheten, eller om de i en eller annen forstand eksisterer i hvert enkelt menneskes bevissthet. Det er hovedsakelig to grunner til dette. For det første er uttrykkene "eksisterer uavhengig av bevisstheten", "skapt av bevistheten" og "eksisterer i et menneskes bevissthet" temmelig uklare. Det er ikke opplagt at de har noen klar mening. Heller ikke er det opplagt at det er mulig å gi noen interessante og virkelig dekkende eksplikasjoner av dem. For det andre virker det berettiget å tro at de ikke kan defineres innenfor rammen av språket til den teorien vi beskjeftiger oss med her. En diskusjon av disse spørsmål vil derfor føre for vidt. Den vil derfor ikke bli ført her.

§5 Noen innledende teoremer.

Man kunne si at trosfeltet til x ved tidspunktet t i verdenen w er lukket under logisk ekvivalens hvis og bare hvis det er slik at hvis y er et utsagn som x tror ved t i w så er det også slik at z er et slikt utsagn om z har samme sannhetsmengde som y. Mer presist dersom og bare dersom:

(Ay)(Az)(Tror;w(y,x,t) & s;f(y)=s;f(z) & zêfU –> Tror;w(z,x,t))

Man kan først merke seg at hvis trosfeltet til x ved tidspunktet t i verdenen w er en deduktivt lukket mengde av finstrukturerte utsagn i den betydningen som ble definert ovenfor er det oså lukket under logisk ekvivalens. Vi definerer "CLe(Δ)", som leses: "Δ er en mengde med finstrukturerte utsagn som er lukket under logisk ekvivalens", ved:

Definisjon 5.1 CLe(Δ) <–> ΔêPt(fU) &
(Ay)(Az)(yêΔ&zêfU & s;f(y)=s;f(z) –> zêΔ)

Det teorem som vi ønsker å betrakte kan formuleres slik:

Teorem 5.1 Anta wêI &têT Da gjelder:
(a) DCL;f(Tr;w(x,t)) <–> DCL(Tr@;w(x,t))& CLe(Tr;w(x,t))
(b) DCL;f(Vt;w(x,t)) <–> DCL(Vt@;w(x,t))& CLe(Vt;w(x,t))

Tenker man seg <x,t> fiksert vil Tr@;w(x,t) representere en funksjon som til enhver mulig verden w, ie. ethvert element wêI, tilordner en mengde av mengder med mulige verdener. Vi definerer:

Definisjon 5.2 Tr@;(x,t) = Mg(<w, Tr@;w(x,t)>: wêI)

Da følger det at Tr@;(x,t) : I –> Pt(Pt(I)). Det følger derfor at <I, Tr@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon. Nå ser man lett at Mg(w: DCL(Tr@;w(x,t))) vil være mengden av de Tr@;(x,t)-normale punktene i denne modalfunksjonen. Teorem 3.1 i avsnittet om begrensede modalfunksjoner kan derfor direkte anvendes på denne strukturen.

Vi definerer T;(x,t) ved:

Definisjon 5.3 T;(x,t)(a) = Mg(w: aêTr@;w(x,t)) forutsatt at aêPt(I)

Studerer man denne definisjonen ser man at T;(x,t)(a) er en mengde med mulige verdener og at den derfor representerer et utsagn. Vi skal kalle dette utsagnet for "utsagnet at x ved t tror a". Man ser at dette utsagnet er sant i en verden w hvis og bare hvis aêTr@;w(x,t). I sin tur er dette i følge Definisjon 3.3 ekvivalent med (Ez)(Tror;w(z,x,t) & y=s;f(z)). Strengt tatt er derfor T;(x,t) sannhetsmengden til utsagnet at det finnes et finstrukturert utsagn z som har a som sin sannhetsmengde og som er slik at z beskriver noe x tror ved tidspunktet t i verdenen w. Hvis man strengt holder seg til dette er det klart at det ikke er så lett å finne noen enkel og grei lesemåte av uttrykket "T;(x,t)(a)". Enda verre blir det om man itererer operatoren T;(x,t) og skal lese uttrykk av typen "T;(x,t)(T;(x,t)(a))". Selvom meningsinnholdet til dette uttrykket er fastlagt ved definisjonene som har blitt gitt er det likevel hensiktsmessig å kunne ha en forholdsvis kort lesemåte. Den som har blitt foreslått ovenfor synes egnet og vil bli brukt i det følgende.

I det følgende skal det også innføres en operator som er dual til operatoren T;(x,t). Denne betegnes med "CT;(x,t)" og defineres på følgende måte:

Definisjon 5.3 CT;(x,t)(a) = –T;(x,t)(–a) forutsatt at aêPt(I)

Uttrykket "CT;(x,t)(a)" skal vi tillate oss å lese "utsagnet a er logisk sett forenelig med alle de utsagn x tror er sanne ved tidspunktet t i verdenen w". Denne lesemåten tas med omtrent de samme forbehold som det ble gjort rede for ovenfor i forbindelse med "T;(x,t)(a)". Med disse forbehold virker lesemåten berettiget og treffende i den utstrekning man forutsetter at trosfeltet til x ved tidspunktet t er deduktivt lukket i den betydning som det ble gjort rede for tidligere.

Hvis man studerer viten istedet for tro ser man lett at det som er blitt sagt ovenfor lar seg overføre til viten:

Forutsetter man derfor at <x,t> fiksert vil Vt@;w(x,t) representere en funksjon som til enhver mulig verden w, ie. ethvert element wêI, tilordner en mengde av mengder med mulige verdener. Vi definerer:

Definisjon 5.4 Vt@;(x,t) = Mg(<w, Vt@;w(x,t)>: wêI)

Da følger det at Vt@;(x,t) : I –> Pt(Pt(I)). Det følger derfor at <I, Vt@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon. Nå ser man lett at Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t))) vil være mengden av de Vt@;(x,t)-normale punktene i denne modalfunksjonen. Teorem 3.1 i avsnittet om begrensede modalfunksjoner kan derfor direkte anvendes også på denne strukturen.

Vi definerer V;(x,t) ved:

Definisjon 5.5 V;(x,t)(a) = Mg(w: aêVt@;w(x,t)) forutsatt at aêPt(I)

Studerer man denne definisjonen ser man at V;(x,t)(a) er en mengde med mulige verdener og at den derfor representerer et utsagn. Vi skal kalle dette utsagnet for "utsagnet at x ved t vet a". Man ser at dette utsagnet er sant i en verden w hvis og bare hvis aêVt@;w(x,t). I sin tur er dette i følge Definisjon 3.6 ekvivalent med (Ez)(Vet;w(z,x,t) & y=s;f(z)). Strengt tatt er derfor V;(x,t) sannhetsmengden til utsagnet at det finnes et finstrukturert utsagn z som har a som sin sannhetsmengde og som er slik at z beskriver noe x vet ved tidspunktet t i verdenen w. Hvis man strengt holder seg til dette er det klart at det ikke er så lett å finne noen enkel og grei lesemåte av uttrykket "V;(x,t)(a)". Enda verre blir det om man itererer operatoren V;(x,t) og skal lese uttrykk av typen "V;(x,t)(V;(x,t)(a))". Selvom meningsinnholdet til dette uttrykket er fastlagt ved definisjonene som har blitt gitt er det likevel hensiktsmessig å kunne ha en forholdsvis kort lesemåte. Den som har blitt foreslått ovenfor synes egnet og vil bli brukt i det følgende.

I det følgende skal det også innføres en operator som er dual til operatoren V;(x,t). Denne betegnes med "CV;(x,t)" og defineres på følgende måte:

Definisjon 5.6 CV;(x,t)(a) = –V;(x,t)(–a) forutsatt at aêPt(I)

Uttrykket "CV;(x,t)(a)" skal vi tillate oss å lese "utsagnet a er logisk sett forenelig med alle de utsagn x vet er sanne ved tidspunktet t i verdenen w". Denne lesemåten tas med omtrent de samme forbehold som det ble gjort rede for ovenfor i forbindelse med "V;(x,t)(a)". Med disse forbehold virker lesemåten berettiget og treffende i den utstrekning man forutsetter at trosfeltet til x ved tidspunktet t er deduktivt lukket i den betydning som det ble gjort rede for tidligere.

Det fremgår av det vi har sagt ovenfor at <I, Tr@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon og at Mg(w: DCL(Tr@;w(x,t))) er mengden av de Tr@;(x,t)-normale punktene i denne modalfunksjonen. Det følger derfor selvfølgelig at de generelle satsene som vi har vist om begrensede modalfunksjoner også kan anvendes på denne spesielle strukturen. Spesielt gjelder dette operasjonen CT;(x,t) som vi definerte ved å sette at:

CT;(x,t)(a) = –T;(x,t)(–a) forutsatt at aêPt(I)

Anvender man Teorem 3.7 i Del I ser man at vi må ha:

Teorem 5.2: Anta s er den begrensede modalfunksjonen <I, Tr@;(x,t)> og at têT. Anta wêMg(w: DCL(Tr@;w(x,t)))

Da har man at:

(a) wêCT;(x,t)(a) <–> aΩ SN(Mg(b: bêPt(I)& wêT;(x,t)(b))) ≠ø

(b) wêCT;(x,t)(a) <–> aΩ SN(Mg(b: bêPt(I)& bêTr@;w(x,t))) ≠ø

SN(Mg(b: bêPt(I)& wêT;(x,t)(b))) representerer snittet av alle de utsagn som individet x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w. At

aΩ SN(Mg(b: bêPt(I)& wêT;(x,t)(b))) ≠ø

betyr derfor at det finnes en mulig verden hvor a er sann, og hvor alle de utsagn som x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w også er sanne, mao. at a er forenelig med denne mengden av utsagn. Dette rettferdigjør den lesemåten som vi foreslo for uttrykket "CT;(x,t)(a)" ovenfor, nemlig: "utsagnet a er logisk sett forenelig med alle de utsagn x tror er sanne ved tidspunktet t i verdenen w".

Helt analoge betraktninger kan gjøre i forbindelse med viten, og dermed operasjonene V;(x,t) og CV;(x,t). Siden <I, Tr@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon og Mg(w: DCL(Tr@;w(x,t))) er mengden av de Tr@;(x,t)-normale punktene i denne modalfunksjonen, kan man anvende Teorem 3.7 fordi CV;(x,t) representerer "mulighets"-operatoren i denne strukturen. Man har derfor i analogi med Teorem 5.2:

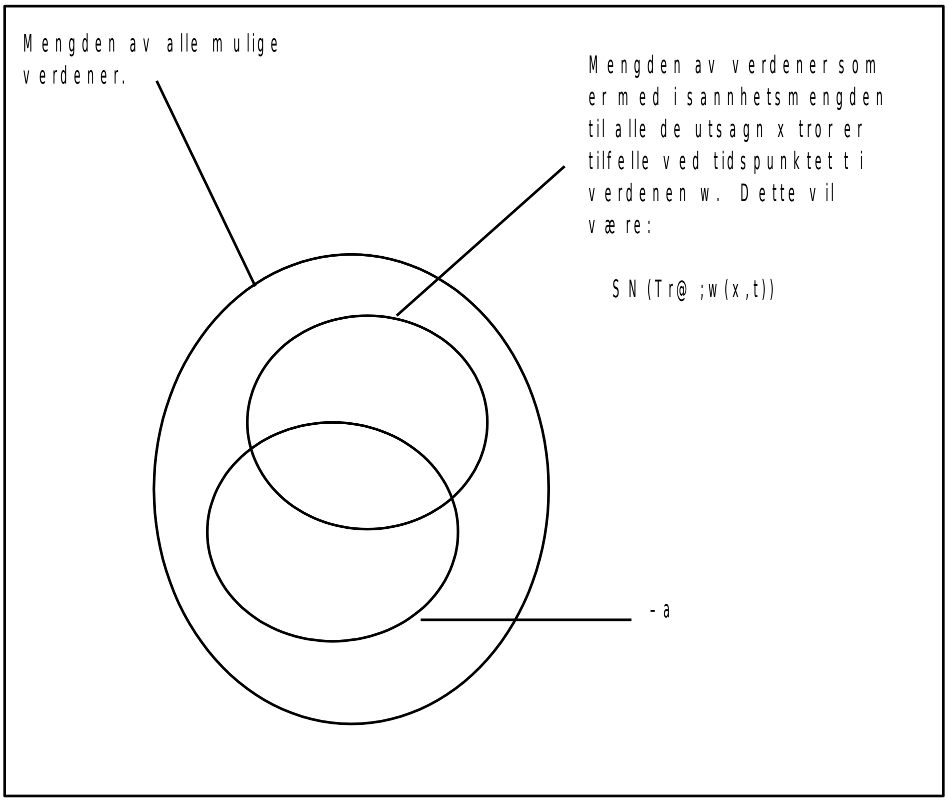
Teorem 5.3: Anta s er den begrensede modalfunksjonen <I, Vt@;(x,t)>, og at têT. Anta wêMg(w: DCL(Vt@;w(x,t)))

Da har man at:

(a) wêCV;(x,t)(a) <–> aΩ SN(Mg(b: bêPt(I)& wêV;(x,t)(b))) ≠ø

(b) wêCV;(x,t)(a) <–> aΩ SN(Mg(b: bêPt(I)& bêVt@;w(x,t))) ≠ø

Den følgende figur gir en illustrasjon til de forhold som ble omtalt rett ovenfor i forbindelse med tro:


Mengden av alle mulige verdener.
Mengden av verdener som er med i sannhetsmengden til alle de utsagn x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w. Dette vil være:
SN(Tr@;w(x,t))
-a

§6 Teoremer om rasjonell tro og viten.

Siden <I,Tr@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon og Mg(w: DCL(Tr@;w(x,t))) er mengden av alle de Tr@;(x,t)-normale punktene i denne modalfunksjonen kan man umiddelbart tillempe alle de teoremene som ble vist i §3 om begrensede modalfunksjoner generelt på denne spesielle strukturen. I lys av Teorem 5.1 har man om man setter per definisjon q;(x,t) = Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t))) at

q;(x,t) Inkl Mg(w: DCL(Tr@;w(x,t)))

Ved å anvende Teorem 3.1 I Del I har man derfor at den følgende sats holder:

Teorem 6.1 Anta q;(x,t) = Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t))). Anta ø≠h Inkl q;(x,t). Anta a,b,c êPt(I) og at n,kêNat. Da gjelder:

(i) T;(x,t)/n/(a) <=> –CT;(x,t)/n/(–a)

(ii) T;(x,t)/2/(a) <=> –CT;(x,t)/2/(–a)

(iii) Er a=>b en tautologisk mengde har man, om k≥0, at også
SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) => (T;(x,t)/k+1/(a) => T;(x,t)/k+1/(b))
er en tautologisk mengde

(iv) Er a=>b en tautologisk mengde har man, om k≥0, at også
SN/n,0,∞/(T;(x,t)/n/(h)) => (T;(x,t)/k+1/(a) => T;(x,t)/k+1/(b))
er en tautologisk mengde

(v) Er a;1,....,a;r,bêPt(I) & n≥1, og er a;1Ω...Ωa;n => b en tautologisk mengde gjelder for alle k≥0 at følgende mengde er tautologisk:
SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(T;(x,t)/k+1/(a;1)Ω...ΩT;(x,t)/k+1/(a;n) => T;(x,t)/k+1/(b))

(vi) Er aΩb => c en tautologisk mengde og k≥0 gjelder at

SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(T;(x,t)/k+1/(a)ΩT;(x,t)/k+1/(b) => T;(x,t)/k+1/(c))
er en tautologisk mengde
(vii) Er a <=> b en tautologisk mengde er også
T;(x,t)/n/(a) <=> T;(x,t)/n/(b) en tautologisk mengde.
(viii) Er n≥0 gjelder at
SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) => T;(x,t)/k+1/(I) er tautologisk.

Bemerkning: Siden <I, Vt@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon og Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t))) er mengden av de Vt@;(x,t)-normale punktene i denne modalfunksjonen, ser man lett at teoremet ovenfor også holder for viten. Man behøver bare å erstatte "Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t)))" med "Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t)))" og bokstaven "T" overalt med "V" så fremkommer en ny formulering som også er et teorem.

På samme måte som Teorem 6.1 følger ved hjelp av Teorem 3.1 I Del I følger den følgende sats ved hjelp av Teorem 3.2 i Del I siden <I,Tr@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon:

Teorem 6.2 Anta q;(x,t) = Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t))). Anta ø≠h Inkl q;(x,t). Anta a,b,c êPt(I) og at n,kêNat. Da gjelder det at de følgende mengder er tautologiske:

(i) SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(T;(x,t)/k+1/(a)Ω.T;(x,t)/k+1/(b) => T;(x,t)/k+1/(aΩb))
(i) SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(T;(x,t)/k+1/(aΩb) => T;(x,t)/k+1/(a)ΩT;(x,t)/k+1/(b))
(i) SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(T;(x,t)/k+1/(a)ΩT;(x,t)/k+1/(b) <=> T;(x,t)/k+1/(aΩb))
(i) SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(T;(x,t)/k+1/(a => b) => T;(x,t)/k+1/(a) => T;(x,t)/k+1/(b))

Bemerkning: Siden <I, Vt@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon og Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t))) er mengden av de Vt@;(x,t)-normale punktene i denne modalfunksjonen, ser man lett at teoremet ovenfor også holder for viten. Man behøver bare å erstatte "Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t)))" med "Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t)))" og bokstaven "T" overalt med "V" så fremkommer en ny formulering som også er et teorem.

Det følgende teorem følger ved hjelp av Teorem 3.3 i Del I, siden <I,Tr@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon:

Teorem 6.3 Anta q;(x,t) = Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t))). Anta ø≠h Inkl q;(x,t). Anta a,b,c êPt(I) og at n,kêNat. Da gjelder:
(i) CT;(x,t)/n/(a) = –T;(x,t)/n/(–a)
(ii) Er –a tautologisk gjelder at
SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) => –CT;(x,t)/k+1/(a) er tautologisk.
(iii) Er a;1,....,a;r,bêPt(I) & r≥1, og er b=>a;1U...Ua;n en tautologisk mengde gjelder for alle k≥0 at følgende mengde er tautologisk:
SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(CT;(x,t)/k+1/(b) =>CT;(x,t)/k+1/(a;1)U...UCT;(x,t)/k+1/(a;n))
(iv) Er a=>b en tautologisk mengde har man, om k≥0, at også
SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) => (CT;(x,t)/k+1/(a) => CT;(x,t)/k+1/(b)) er en tautologisk mengde

(v) Er a=>b en tautologisk mengde har man, om k≥0, at også
SN/n,0,∞/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(CT;(x,t)/k+1/(a) => CT;(x,t)/k+1/(b)) er en tautologisk mengde

(vi) Er a => bUc en tautologisk mengde og k≥0 gjelder at
SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(CT;(x,t)/k+1/(a) => CT;(x,t)/k+1/(b)U CT;(x,t)/k+1/(c)) er en tautologisk mengde

(vii) Er a <=> b en tautologisk mengde er også
CT;(x,t)/n/(a) <=> CT;(x,t)/n/(b) en tautologisk mengde.

Bemerkning: Siden <I, Vt@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon og Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t))) er mengden av de Vt@;(x,t)-normale punktene i denne modalfunksjonen, ser man lett at teoremet ovenfor også holder for viten. Man behøver bare å erstatte "Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t)))" med "Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t)))" og bokstaven "T" overalt med "V" så fremkommer en ny formulering som også er et teorem.

Det følgende teorem følger ved hjelp av Teorem 3.4 I Del I siden <I,Tr@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon:

Teorem 6.4 Anta q;(x,t) = Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t))). Anta ø≠h Inkl q;(x,t). Anta a,b,c êPt(I) og at n,kêNat. Da gjelder at de følgende mengder er tautologiske:

(i) SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(CT;(x,t)/k+1/(a)U.CT;(x,t)/k+1/(b) => CT;(x,t)/k+1/(aUb))
(ii) SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(CT;(x,t)/k+1/(aUb) => CT;(x,t)/k+1/(a)U CT;(x,t)/k+1/(b))
(iii) SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
(CT;(x,t)/k+1/(a)U CT;(x,t)/k+1/(b) <=> CT;(x,t)/k+1/(aUb))
(iv) SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
((–CT;(x,t)/k+1/(a)) Ω CT;(x,t)/k+1/(b) => CT;(x,t)/k+1/((–a)Ω b))

Bemerkning: Siden <I, Vt@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon og Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t))) er mengden av de Vt@;(x,t)-normale punktene i denne modalfunksjonen, ser man lett at teoremet ovenfor også holder for viten. Man behøver bare å erstatte "Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t)))" med "Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t)))" og bokstaven "T" overalt med "V" så fremkommer en ny formulering som også er et teorem.

Det følgende teorem følger ved hjelp av Teorem 3.5 i Del I siden <I,Tr@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon:

Teorem 6.5 Anta q;(x,t) = Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t))). Anta ø≠h Inkl q;(x,t). Anta a,b,c êPt(I) og at n,kêNat. Da gjelder at de følgende mengder er tautologiske:

(i) h=>(T;(x,t)(a)=>T;(x,t)(b=>a))
(ii) h=>(T;(x,t)(–a)=>T;(x,t)(a=>b))
(iii) CT;(x,t)(I) <=> –T;(x,t)(ø)
(iv) h=>(T;(x,t)(a<=>b) => (CT;(x,t)(a)<=>CT;(x,t)(b)))
(v) h=>(T;(x,t)(a<=>b) => (T;(x,t)(a) <=>T;(x,t)(b)))
(vi) h=>(T;(x,t)(a)UT;(x,t)(b) => T;(x,t)(aUb))
(vii) h=>(CT;(x,t)(aΩb) => CT;(x,t)(a)ΩCT;(x,t)(b))

(viii) h=>(T;(x,t)(a)ΩCT;(x,t)(b) => CT;(x,t)(aΩb))
(ix) h=>(T;(x,t)(aUb) => CT;(x,t)(a)UT;(x,t)(b))
(x) h=>(CT;(x,t)(a=>b)UT;(x,t)(b=>a))
(xi) h=>(CT;(x,t)(a =>b) <=> (T;(x,t)(a) =>CT;(x,t)(b)))
(xii) h=>(CT;(x,t)(I) <=> (T;(x,t)(a) =>CT;(x,t)(b)))
(xiii) h=>((CT;(x,t)(a) =>T;(x,t)(b)) => T;(x,t)(a=>b))
(xiv) h=>((CT;(x,t)(a) => T;(x,t)(b)) => (T;(x,t)(a) => T;(x,t)(b)))
(xv) h=>((CT;(x,t)(a) => T;(x,t)(b)) => (CT;(x,t)(a) => CT;(x,t)(b)))

Bemerkning: Siden <I, Vt@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon og Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t))) er mengden av de Vt@;(x,t)-normale punktene i denne modalfunksjonen, ser man lett at teoremet ovenfor også holder for viten. Man behøver bare å erstatte "Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t)))" med "Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t)))" og bokstaven "T" overalt med "V" så fremkommer en ny formulering som også er et teorem.

Det følgende teorem følger ved hjelp av Teorem 3.6 i Del I siden <I,Tr@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon:

Teorem 6.6 Anta q;(x,t) = Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t))). Anta ø≠h Inkl q;(x,t). Anta a,b,c êPt(I) og at n,kêNat. Da gjelder det at de følgende mengder er tautologiske:

(i) T;(x,t)(T;(x,t)(a)) <=>–CT;(x,t)(CT;(x,t)(–a))
(ii) T;(x,t)(T;(x,t)(–a)) <=> –CT;(x,t)(CT;(x,t)(a))
(iii) CT;(x,t)(CT;(x,t)(–a)) <=> –T;(x,t)(T;(x,t)(a))
(iv) T;(x,t)(CT;(x,t)(–a)) <=> –CT;(x,t)(T;(x,t)(a))
(v) CT;(x,t)(T;(x,t)(a)) <=> –T;(x,t)(CT;(x,t)(–a))
(vi) h=>(–CT;(x,t)(aUb) <=> –CT;(x,t)(a)Ω–CT;(x,t)(b))
(vii) h=>(CT;(x,t)(aUb) <=> CT;(x,t)(a)UCT;(x,t)(b))
(viii) h=>(T;(x,t)(a=>b) => (CT;(x,t)(a) => CT;(x,t)(b)))
(ix) h=>(T;(x,t)((–a)=>a) <=> T;(x,t)(a))
(x) h=>(T;(x,t)(a=>(–a)) <=> T;(x,t)(–a))
(xi) h=>(T;(x,t)((–b)=>a)ΩT;(x,t)(b=>a). <=> T;(x,t)(a))
(xii) h=>(T;(x,t)(a) =>(CT;(x,t)(b) => CT;(x,t)(aΩb)))
(xiii) Er a en tautologisk mengde så er h=>(CT;(x,t)(b)=>CT;(x,t)(aΩb)) det også.

Bemerkning: Siden <I, Vt@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon og Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t))) er mengden av de Vt@;(x,t)-normale punktene i denne modalfunksjonen, ser man lett at teoremet ovenfor også holder for viten. Man behøver bare å erstatte "Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t)))" med "Mg(w: DCL(Vt@;w(x,t)))" og bokstaven "T" overalt med "V" så fremkommer en ny formulering som også er et teorem.

I forbindelse med studiet av begrensede relasjonelle strukturer så vi på hva som fulgte hvis man i en begrenset normal struktur <X,N> tenkte seg at h Inkl L(h), der h var en mengde som var inkludert i de normale punktene i strukturen. Det teorem som var av relevans i denne forbindelse var Teorem 4.7 i Del I. Man kan betrakte et par tilsvarende satser i forbindelse med strukturene <I, Vt@;(x,t)> og <I, Tr@;(x,t)>:

Teorem 6.7. Anta q er mengden av de normale punktene i den begrensede modalfunksjonen <I, Tr@;(x,t)>. Anta M(h) & ø≠h Inkl q og at:

(Ax)(xêh –> xêT;(x,t)(h))
(a) Da gjelder for alle nêNat at:
h=>T;(x,t)/n/(h) er en tautologisk mengde.
(b) Vi har også under disse forutsetninger at følgende mengde er tautologisk for alle kêNat:
h => SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h))
(c) Det gjelder videre at h => SN/n,0,∞/(T;(x,t)/n/(h)) er en tautologisk mengde.

Bevis: Denne påstanden følger umiddelbart fra det forhold at <I,Tr@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon og Teorem 4.7 i Del I §4. **Q.E.D.**

Fra dette teoremet følger det at om man føyer til (Ax)(xêh –> xêT;(x,t)(h)) som premiss i Teorem 6.1 – 6.4 så kan man i disse teoremene skrive h overalt hvor det står "SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h))" og "SN/n,0,∞/(T;(x,t)/n/(h))"

Et helt tilsvarende teorem gjelder for viten:

Teorem 6.8. Anta q er mengden av de normale punktene i den begrensede modalfunksjonen <I, Vt@;(x,t)>. Anta M(h) & ø≠h Inkl q og at:
(Ax)(xêh –> xêV;(x,t)(h))
(a) Da gjelder for alle nêNat at:
h=>V;(x,t)/n/(h) er en tautologisk mengde.
(b) Vi har også under disse forutsetninger at følgende mengde er tautologisk for alle kêNat:
h => SN/n,0,k/(V;(x,t)/n/(h))
(c) Det gjelder videre at h => SN/k,0,∞/(V;(x,t)/k/(h)) er en tautologisk mengde.

Bevis: Også denne påstanden følger direkte fra det forhold at <I, Vt@;(x,t)> er en begrenset modalfunksjon, samt Teorem 4.7 i §4 i Del I. **Q.E.D.**

I denne forbindelse er det en påstand som kan være interessant å drøfte litt mer utførlig. Det dreier seg om den følgende sats:

(+) (Ah)(M(h)&h≠ø & h Inkl q;(x,t) –> h Inkl Mg(w: wêT;(x,t)(h))).

Det denne påstanden uttrykker er at dersom h er en hvilken som helst mengde som er inkludert i mengden av alle de verdenene hvor trosfeltet til x ved tidspunktet t er deduktivt lukket så er h også inkludert i mengden av alle de mulige verdener hvor h er inkludert i trosfeltet til x ved tidspunktet t. Dette innebærer som vi har vist i en tidligere forbindelse at den følgende mengde er tautologisk om M(h) &h≠ø& h Inkl q;(x,t), nemlig:

h=> SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) for alle kêNat.

En påstand som er helt analogt med (+), men som angår viten kan også betraktes:

(++) (Ah)(M(h)&h≠ø & h Inkl j;(x,t) –> h Inkl Mg(w: wêV;(x,t)(h)))

Det forutsettes at j er definert ved: j;(x,t)= Mg(w: DCL;f(Vt;w(x,t))).

Det synes imidlertid som om (+) og (++) ved nærmere ettertanke ikke er særlig plausible. La oss anta at (+) holder og at a er en mengde med mulige verdener. Da har vi at aΩq;(x,t) Inkl q;(x,t). Anta aΩq;(x,t)≠ø. Fra dette og (+) følger at:
aΩq;(x,t) Inkl T;(x,t)(aΩq;(x,t)). Dette i sin tur impliserer at

(1) aΩq;(x,t) => T;(x,t)(aΩq;(x,t))
er en tautologisk mengde. Nå har man at

(2) q;(x,t) => (T;(x,t)(aΩq;(x,t)) => T;(x,t)(a)) er en tautologisk mengde. Det følger fra (1) og (2) at: aΩq;(x,t) => T;(x,t)(a) er tautologisk. Herav følger at

(3) q;(x,t) => (a =>T;(x,t)(a)) er en tautologisk mengde. Nå var a en helt vilkårlig mengde som oppfylte kravet aΩq;(x,t)≠ø. Det følger derfor at vi har vist:

(4) (Aa)(aêPt(I) & aΩq;(x,t)≠ø –> [q;(x,t) => (a=>T;(x,t)(a))] = I).
Dette er temmelig besynderlig i seg selv. Men fra (4) følger at dersom a, såvel som negasjonen av a, dvs. –a er forenelige med q;(x,t), med andre ord at aΩq;(x,t)≠ø og (–a)Ωq;(x,t)≠ø så har man at q;(x,t)=> T;(x,t)(a)U T(x,t)(–a) er tautologisk. Dette virker ikke særlig plausibelt.

Et helt analogt resonnement kan gjennomføres i forbindelse med (++). Det er nærliggende å slutte at hverken (+) eller (++) bør aksepteres.

Den følgende sats er av en viss interesse i forbindelse med Teorem 6.1. Satsen har som konsekvens at punkt (v) i dette teoremet kan generaliseres betraktelig.

Teorem 6.9. Anta q;(x,t) er mengden av de normale punktene i den begrensede modalfunksjonen <I, Tr@;(x,t)>, mao. at q;(x,t)=Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t))). Anta M(h) & ø≠h Inkl q. Anta videre at wêI &bêPt(I) og at C er en ikke-tom mengde der C Inkl Pt(I) og hvor man har at SN(C)=>b er en tautologisk mengde. Da gjelder for alle wêI:

wêSN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) –>
wêSN(Mg(T;(x,t)/k+1/(y): yêC) –> wêT;(x,t)/k+1/(b)

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på k. (a) k=0. Anta da at wêSN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)). Dette innebærer at wêSN/n,0,0/(T;(x,t)/n/(h))=h. Dette innebærer at w er et normalt punkt. Anta videre at wêSN(Mg(T;(x,t)/k+1/(y): yêC). Fra dette kan man slutte at for alle yêC har man wêT;(x,t)(y). Fra dette og definisjonen av operasjonen "T;(x,t)" følger at:

(Ay)(yêC –> yêTr@;(x,t)(w)). Men siden w er et normalt punkt følger at (1) SN(C)êTr@;(x,t)(w). At w er et normalt punkt har som konsekvens at Tr@;(x,t)(w) er lukket under inklusjon. Siden SN(C)=>b er en tautologisk mengde innebærer dette at SN(C) Inkl b. Herav følger ved hjelp av (1) at bêTr@;w(x,t), med andre ord at wêT;(x,t)(b). Dette viser at satsen holder om k=0.

(b) Anta påstanden holder for k. Vi skal da vise at den holder for k+1. Anta derfor SN(C)=>b er en tautologisk mengde og at

(1) wêSN/n,0,k+1/(T;(x,t)/n/(h)) og
(2) wêSN(Mg(T;(x,t)/k+2/(y): yêC)

Fra induksjonshypotesen følger at

(3) SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) =>
SN(Mg(T;(x,t)/k+1/(y): yêC) => T;(x,t)/k+1/(b)

er en tautologisk mengde. Fra (1) følger at wêh og derfor at w er et normalt punkt. Fra (2) har man: (4) (Ay)(yêC –> wêT;(x,t)/k+2/(y)). Fra dette kan man slutte: (5) (Ay)(yêC –> wêT;(x,t)(T;(x,t)/k+1/(y))). I lys av definisjonen av "T;(x,t)" innebærer dette;

(6) (Ay)(yêC –> T;(x,t)/k+1/(y))êTr@;w(x,t)) Men siden w er et normalt punkt i modalfunksjonen <I,Tr@;(x,t)> har vi at Tr@;w(x,t) er lukket under uendelig snitt. Det følger derfor i lys av (6):

(7) SN(Mg(T;(x,t)/k+1/(y): yêC)êTr@;w(x,t)

Fra (1) følger (8) (Aj)(0 ≤ j ≤k+1 –> wêT;(x,t)/j/(h)). Anta for vilkårlig s at 0 ≤ s ≤k. Da har man s+1≤k+1. Ved hjelp av (8) kan man da slutte:

(9) wêT;(x,t)/s+1/(h). Man har derfor:

(10) wêT;(x,t)(T;(x,t)/s/(h)). Dette vil si: T;(x,t)/s/(h)êTr@;w(x,t). Men siden s var vilkårlig har man:

(11) (As)(0 ≤s≤k –> T;(x,t)/s/(h)êTr@;w(x,t)). Nå er w et normalt punkt. Fra (11) kan man derfor slutte: (12) SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h))êTr@;w(x,t). Fra (3), (7) og (12), samt det at w er et normalt punkt følger at

(13) T;(x,t)/k+1/(b)êTr@;w(x,t). Men i lys av definisjonen av operasjonen "T;(x,t)" innebærer dette wêT;(x,t)(T;(x,t)/k+1/(b)) = T;(x,t)/k+2/(b). Men dette er det resultatet vi ønsker. Dette avslutter beviset for Teorem 6.9. **Q.E.D.**

Fra Teorem 6.9 kan man også utlede den følgende sats som innebærer at Mg(a: wêT;(x,t)/k+1/(a)) er deduktivt lukket i vår betydning om w er en mulig verden som er med i SN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) om h er en ikke-tom mengde som er inkludert i klassen av de normale punktene i modalfunksjonen <I,Tr@;(x,t)>. Vi har derfor at den følgende sats holder:

Teorem 6.10. Anta q;(x,t) er mengden av de normale punktene i den begrensede modalfunksjonen <I, Tr@;(x,t)>, mao. at q;(x,t)=Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t))). Anta M(h) & ø≠h Inkl q. Da gjelder for alle wêI:

wêSN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)) –>
DCL(Mg(a: wêT;(x,t)/k+1/(a)))

Bevis: For å vise dette må man først godtgjøre at IêMg(a: wêT;(x,t)/k+1/(a)) om man har wêSN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)). Dette følger imidlertid direkte fra Teorem 6.1, punkt (viii). Videre er det nødvendig å vise at Mg(a: wêT;(x,t)/k+1/(a)) er lukket under inklusjon under de forutsetninger som er nevnt. Dette følger fra punkt (iii) i Teorem 6.1. Endelig er det nødvendig å bevis at hvis C er ikke-tom mengde av delmengder av I der man har (1) C Inkl Mg(a: wêT;(x,t)/k+1/(a)) så er også SN(C)êMg(a: wêT;(x,t)/k+1/(a)). Fra (1) følger (Ay)(yêC –> wêT;(x,t)/k+1/(y)). Dette vil si at wêSN(Mg(T;(x,t)/k+1/(y): yêC). Men siden vi forutsetter at wêSN/n,0,k/(T;(x,t)/n/(h)), og vi dessuten har at SN(C)=>SN(C) er tautologisk har vi at SN(C)êMg(a: wêT;(x,t)/k+1/(a)) om vi i det forrige teoremet setter b=SN(C). Dette viser at satsen holder. **Q.E.D.**

Det bør bemerkes at Teorem 6.9 og Teorem 6.10 fremdeles holder om vi overalt erstatter "T" med "K", dvs. arbeider med viten istedet for tro.

§7 Intepreterte språk for epistemisk og doxastisk logikk.

Vi har tidligere definert hva som forstås med et intepretert første-ordens språk. Dette er et ordnet par <L,g,D> hvor L er et første-ordens språk og g er en intepretasjonsfunksjon for L. D er en ikke-tom mengde som inneholder alle de individene man kvantifiserer over i språket. g er en funksjon som oppfyller følgende krav: (i) Er P et n-ært predikatsymbol i L har man at g(P)êPt(D^n)^I. Dette innebærer at g(P) er en funksjon som tilordner enhver mulig verden, dvs. ethvert element i I, en mengde med n-tupler. (ii) Er "=" identitets-predikatet i L har man at <a,b>êg("=")(w) hvis og bare hvis a=b. Dette innebærer at g tilordner identitetspredikatet i L den funksjonen som til hver mulig verden tilordner verdenen identitetsrelasjonen over D.

I denne typen første-ordens språk inngår ved siden av de vanlige setningslogiske konnektivene, all-kvantoren og eksistenskvantoren, samt identitetspredikatet bare predikatsymboler og variabeltegn. Funksjonsymboler, konstanter og bestemte beskrivelser er ikke innkludert i det logiske vokabularet til språket. Med *et språk for epistemisk og doxastisk logikk* forstår vi et første-ordens språk i betydningen ovenfor, men hvor man har tatt med to nye konstruksjoner blandt de logiske symbolene, nemlig "K" og "B" og lagt til den følgende nye regel for konstruksjon av velformede formler:

R1 Er F en velformet formel i L og x, y to variabeltegn i L, er K(x,y,F) og B(x,y,F) også velformede formler i L.

En formel av typen "K(x,y.F)" er det meningen at skal leses som "x vet ved tidspunktet t at F". Formler av typen "B(x,y,F)" leses "x tror ved tidspunktet t at F". I det følgende skal vi bruke uttrykket "CFm(L)" for å betegne klassen av de lukkede formlene i L. Med en verditilordning for L over området D, der D er en ikke-tom mengde, forstås en funksjon som tilordner variabeltegnene i L elementer i mengden D.

Med en intepretasjon av et språk L for epistemisk og doxastisk logikk forstår vi et tuple <D,g,N,H> hvor (i) D er en ikke-tom mengde. (ii) N er en en-entydig funksjon som tilordner hvert element i D et navn. Det språket som fås når L utvides med disse navnene betegnes med L(D). (iii) g er en funksjon som oppfyller de krav vi har nevnt tidligere, men i tillegg skal den nå også tilordne konstruksjonene K og B funksjoner i mengden [Pt(Prod(D^2,CFm(L(D))))]^I. Dette innebærer at for eksempel g(K) er en funksjon der domenet er mengden av logisk mulige verdener I, og hvor verdiområdet er inkludert i mengden Pt(Prod(D^2,CFm(L(D)))). Er da wêI følger fra dette at:

g(K)(w) Inkl Prod(D^2,CFm(L(D)))

Dette vil si at g(K)(w) er en mengde med ordnete par <<x,y>,F> der x,y er mulige individer i domenet D og hvor F er en lukket formel i L(D). De samme bemerkningene kan gjøres om operatoren B.

H er en funksjon som oppfyller følgende krav:

(iv) H: CFm(L(D)) –(1-1)–> fU
(v) Er x,yêD &FêCFm(L(D)) & wêI
<<x,y>,F>êg(K)(w) <–> Vet;w(H(F),x,y)
(vi) Er x,yêD &FêCFm(L(D)) & wêI
<<x,y>,F>êg(B)(w) <–> Tror;w(H(F),x,y)

I forbindelse med disse kravene bemerker vi det følgende. Det er hensikten at mengden av de lukkede formlene i L(D) skal representere finstrukturerte utsagn. Nå er det i og for seg intet i noe av det som har blitt sagt tidligere som entydig bestemmer identitetskriteriene for slike utsagn. Kravet (iv) innebærer at man innfører et meget fimasket individuasjonskriterium siden H avbilder de lukkede formlene i L(D) en-entydig inn i klassen av finstrukturerte utsagn fU. To forskellige lukkede formler i L(D) vil derfor alltid representere distinkte utsagn av denne typen. Det er i og for seg ikke så unaturlig å foreslå et slikt krav.

Er <<x,y>,F> et par som inngår i g(K)(w) er det meningen at formelen F skal representere et finstrukturert utsagn som individet x vet er riktig ved tidspunktet y i verdenen w. Det er denne tanke som ligger bak kravet (v). Tilsvarende gjenspeiler kravet (vi) den tanke at et par <<x,y>,F> som inngår i g(B)(w) skal representere det forhold at F står for et finstrukturert utsagn som x tror ved tidspunktet y i verdenen w.

Med *et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk* forstås et ordnet par <L,<D,g,N,H>> hvor L er et språk for epistemisk og doxastisk logikk, og <D,g,N,H> er en intepretasjon av L i den betydning som ble forklart rett ovenfor.

Det er nå mulig å gi en presis definisjon av hva som menes med at en formel F i et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk, L, er sann i verdenen w relativt til verditilordningen v for L. I det følgende brukes "Sann(F,L,w,v)" som forkortelse for "Formelen F i L er sann i w relativt til verditilordningen v". Dette predikatet defineres ved induksjon på lengden av formler i L på den følgende måte:

Anta L er et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk. Anta <D,g,N,H> er en intepretasjon for dette språk og at v er en verditilordning for L over D. Da er "Sann(F,L,w,v)" definert induktivt slik:

(i) Er P et n-ært predikat i L, x;1,....,x;n variabeltegn i L og F=P(x;1,...,x;n) har man at Sann(F,L,w,v) hvis og bare hvis <v(x;1),...,v(x;n)>êg(P).

(ii) Er F;1 og F;2 formler i L har man:
Sann(F;1&F;2,L,w,v) <–> (Sann(F;1,L,w,v) & Sann(F;2,L,w,v))
Sann(F;1vF;2,L,w,v) <–> (Sann(F;1,L,w,v) v Sann(F;2,L,w,v))
Sann(F;1–>F;2,L,w,v) <–> (Sann(F;1,L,w,v) –> Sann(F;2,L,w,v))
Sann(F;1<–>F;2,L,w,v) <–> (Sann(F;1,L,w,v) <–> Sann(F;2,L,w,v))
Sann(¬F;1,L,w,v) <–> ¬Sann(F;1,L,w,v)

(iii) Er F en formel i L og x et variabelten i L har man:
Sann((Ax)F,L,w,v) <–> (Ay)(yêD –> Sann(F,L,w,v(x/y)))

(iv) Er F en formel i L og x et variabeltegn i L har man:
Sann((Ex)F,L,w,v) <–> (Ey)(yêD & Sann(F,L,w,v(x/y)))

(v) Er F en formel i L og x;1,...,x;n de variablene som forekommer fri i L settes:
Sann(K(x,y,F),L,w,v) <–>
<<v(x),v(y)>, F[x;1,...,x;n](N(v(x;1)),...,N(v(x;n)))>êg(K)(w)

(vi) Er F en formel i L og x;1,...,x;n de variablene som forekommer fri i L settes:
Sann(B(x,y,F),L,w,v) <–>
<<v(x),v(y)>, F[x;1,...,x;n](N(v(x;1)),...,N(v(x;n)))>êg(B)(w)

Dette avslutter definisjonen.

Er L et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk vil sannhetsverdien til enhver lukket formel være fiksert i enhver logisk mulig verden. Man kan derfor tilordne enhver lukket formel et bestemt utsagn som er sant i nøyaktig de og bare de verdenene hvor formlen er sann. Dette gjelder også de lukkede formlene i L(D). To lukkede formler som er sanne i nøyaktig de samme verdenene vil da uttrykke det samme utsagn. I følge teorien om tro og viten vil det til ethvert utsagn svare minst ett finstrukturert utsagn som har samme sannhetsmengde som utsagnet. Dette vil da også gjelde i forbindelse med den type intepreterte språk som vi nå studerer. Det virker på dette grunnlag ikke helt uberettiget og tenke seg at de finstrukturerte utsagnene er så fint individuert at det til distinkte formler i L(D) svarer distinkte finstrukturerte utsagn. Er <L,<D,g,N,H>> et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk er det rimelig å kreve at hvis F er en lukket formel i L(D) så skal det finstrukturerte utsagnet som H tilordner F, ie. H(F) være sant i nøyaktig de og bare de verdener hvor F er sann:

(+) For enhver FêCFm(L(D)) gjelder det at:
Mg(w: Sann(F,L,w,v)) = s;f(H(F))

om v er en hvilken som helst verditilordning for L over D

§7.1 Teoremer om gyldige formler i språk for epistemisk og doxastisk logikk.

Er F en formel i L og v en verditilordning for L over D, betegner vi sannhetsmengden til F i L relativt til v med "Sm(F,L,v)", og definerer dette uttrykket ved:
Sm(F,L,v) = Mg(w: wêI & Sann(F,L,w,v))
Er F et n-ært predikat i L betegner vi ekstensjonen til F i verdenen w med "Ekst(F,L,w)" og definerer dette uttrykket slik:
Ekst(F,L,w) = Mg(<x;1,....,x;n>: <x;1,...,x;n>êg(F)(w))
Vi sier at en formel F er gyldig i L hvis og bare hvis F er en formel i L som er sann i L i enhver logisk mulig verden og relativt til enhver verditilordning over L. Dette innebærer at om <L,<D,g,N,H>> er et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk så er F gyldig i L hvis og bare hvis man har for enhver verditilordning v for L over D at:
(Aw)(wêI –> Sann(F,L,w,v))

Teorem 7.1 Anta <L,<D,g,N,H>> er et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk. Anta Ra er et binært predikat i L der man har for alle wêI og <x,y>êD^2 at:
<x,y>êg(Ra)(w) –> DCL;f(Tr;w(x,y)) & DCL;f(Vt;w(x,y))
(a) Da gjelder at de følgende formler i L er gyldige i L:
(i) K(x,y,F) –> B(x,y,F)
(ii) K(x,y,F) –> F
(b) Er F;1 –> F;2 en gyldig formel i L gjelder at følgende formler er gyldige i L:
(iii) Ra(x,y) –> (K(x,y,F;1) –> K(x,y,F;2))
(iv) Ra(x,y) –> (B(x,y,F;1) –> B(x,y,F;2))
(c) Er F;1,....,F;n formler i L er de følgende formler gyldige i L:
(v) Ra(x,y) –> (K(x,y,F;1)& ....& K(x,y,F;n) –> K(x,y,F;1& ... &F;n))
(vi) Ra(x,y) –> (B(x,y,F;1)& ....& B(x,y,F;n) –> B(x,y,F;1& ... &F;n))
(d) Er F en formel som er gyldig i L gjelder:
(vii) Ra(x,y) –> K(x,y,F)
(viii) Ra(x,y) –> B(x,y,F)

Bevis: Beviset overlates til leseren som en øvelse. **Q.E.D.**

En rekke kommentarer kan være på sin plass i forbindelse med Teorem 7.1. Som man husker innebærer DCL;f(Tr;w(x,y)) at trosfeltet til x ved tidspunktet y i verdenen w er deduktivt lukket. Tilsvarende betyr DCL;f(Vt;w(x,y)) at kunnskapsfeltet til x ved tidspunktet y i verdenen w er deduktivt lukket i den betydning vi tidligere har forklart. Forutsetningen i teoremet om ar Ra skal være et binært predikat i L der:
(1) <x,y>êg(Ra)(w) –> DCL;f(Tr;w(x,y)) & DCL;f(Vt;w(x,y))
for alle x,yêD^2 og wêI innebærer at ekstensjonen til predikatet Ra i verdenen w vil være inkludert i klassen av alle de par <x,y> der trosfeltet og kunnskapsfeltet til x ved tidspunktet y er deduktivt lukket.

I det følgende skal vi tillate oss å si at tros- og kunnskapsfeltet til x ved tidspunktet y i verdenen w er logisk sett rasjonelt organisert hvis og bare hvis man har at DCL;f(Tr;w(x,y)) & DCL;f(Vt;w(x,y)). Innføres denne terminologien kan man si at det at en setning av typen

Ra(x,y) er sann i verdenen w innebærer at trosfeltet og kunnskapsfeltet til x ved tidspunktet y i denne verdenen w er logisk sett rasjonelt organisert.

Det bør noteres at om vi hadde erstattet forutsetningen (1) med den sterekere forutsetningen (2):

(2) <x,y>êg(Ra)(w) <–> DCL;f(Tr;w(x,y)) & DCL;f(Vt;w(x,y))

ville det ha vært helt naturlig å lese formler av typen "Ra(x,y)" som "Tros- og kunnskapsfeltet til x ved tidspunktet y er rasjonelt organisert". Vi har imidlertid oppført forutsetningen (1) fordi denne gir oss et litt sterkere teorem. Men det er klart ot hvis vi bare forutsetter (1) er ikke lesemåten vi nettopp antydet ovenfor helt korrekt.

Når det gjelder punkt (i) og (ii) i Teorem 7.1 gjenspeiler disse aksiomene Ax7 og Ax8 på en måte som det skulle være lett å gjennomskue. Videre ser man at setningene under punkt(b) svarer til kravet om at en deduktivt lukket mengde med finstrukturerte utsagn er lukket under logisk konsekvens. Punkt (c) i satsen holder fordi en mengde med finstrukturerte utsagn som er deduktivt lukket i den betydningen det er tale om her, er lukket under snitt; dvs. at er Δ en deduktivt lukket mengde med finstrukturerte utsagn og har man at X er en ikke-tom delmengde av Δ vil ethvert finstrukturert utsagn som har som sin sannhetsmengde snittet av alle sannhetsmengdene til utsagnene i X også være med i Δ. Endelig gjenspeiler formlene (vii) og (viii) i teoremet det forhold at i en deduktivt lukket mengde med finstrukturerte utsagn er alltid de utsagn som er sanne i alle mulige verdener med.

Er F;1,...,F;n en rekke med formler betegner "Konj/j,1,n/(F;j)" konjunksjonen av dem. Dette innebærer at man har:

Konj/j,1,n/(F;j) = F;1& F;2& ... &F;n

Når det gjelder konstruksjonene "B(x,y,F)" og "K(x,y,F)" kan disse itereres. Vi definerer "B/n/(x,y,F)" induktivt på den følgende måte:

(i) B/0/(x,y,F) = F
(ii) B/n+1/(x,y,F) = B(x,y,B/n/(x,y,F))

Notasjonen "K/n/(x,y,F)" defineres på nøyaktig den samme måten.

I det følgende skal vi bruke "CK(x,y,F)" som forkortelse for formelen "¬K(x,y,¬F)". På samme vis brukes "CB(x,y,F)" som forkortelse for "¬B(x,y,¬F)".

Det er nå mulig å formulere en rekke satser som er helt analoge med Teorem 6.1 – Teorem 6.6 i §6. Disse satsene vil nå bli detaljert formulert for oversiktlig-hetens og klarhetens skyld. Imidlertid vil det ikke bli gitt bevis for dem. Dette skyldes at satsene stort sett er nokså trivielle.

Teorem 7.2 Anta <L,<D,g,N,H>> er et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk. Anta Ra er et binært predikat i L der man har for alle wêI og <x,y>êD^2 at:

<x,y>êg(Ra)(w) –> DCL;f(Tr;w(x,y)) & DCL;f(Vt;w(x,y))

Da gjelder at de følgende formler i L er gyldige i L:

(i) Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(B/k+1/(x,y,F) <–> ¬CB/k+1/(x,y,¬F))
(ii) Konj/n,0,1/(B/n/(x,y,Ra(x,y)) –>
(B/2/(x,y,F) <–> ¬CB/2/(x,y,¬F))

(iii) Er F;1–> F;2 en gyldig formel i L har man, om k≥0, at også
Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –> (B/k+1/(x,y,F;1) –> B/k+1/(x,y,F;2))
er gyldig.

(iv) Er F;1,...,F;r,F formler i L & r≥1, og er F;1&...&F;r –> F en gyldig
formel i L, gjelder for alle k≥0 at følgende formel er gyldig:
Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(B/k+1/(x,y,F;1)Ω...ΩB/k+1/(x,y,F;n) –> B/k+1/(x,y,F))

(v) Er F;1ΩF;2 => F en gyldig formel i L og k≥0 gjelder at
Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(B/k+1/(x,y,F;1)Ω.B/k+1/(x,y,F;2) –> B/k+1/(x,y,F))
også er en gyldig formel.

(vi) Er F;1 <–> F;2 en gyldig formel i L, er også
Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y)))–>
B/k+1/(x,y,F;1) <-> B/k+1/(x,y,F;2) en gyldig formel.

(vii) Er k≥0, og er F en gyldig formel i L, gjelder at
Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –> B/k+1/(x,y,F)) er gyldig.

Dette teoremet er analogt med Teorem 6.1 og svarer punkt for punkt til det. Som man ser er forutsetningene i satsen de samme som i Teorem 7.1. Dette gjelder forøvrig også de neste teoremene. I flere av punktene i teoremet inngår uttrykket: "Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y)))". I lys av forklaringene som ble gitt som innledning til denne satsen har man at dette uttrykket er ekvivalent med:

(1) Ra(x,y) & B(x,y,Ra(x,y)) & ..... & B/k/(x,y,Ra(x,y))

Dette innebærer, siden "Ra(x,y)" er en konjunkt i (1), at tros- og kunnskapsfeltet til x ved tidspunktet y er deduktivt lukket. Videre innebærer den andre konjunkten at x ved tidspunktet y tror at Ra(x,y), mao. er det slik at x ved tidspunktet y indirekte tror at tros- og kunnskapsfeltet til x ved tidspunktet y er deduktivt lukket. Den tredje konjunkten i (1) sier at x ved tidspunktet y tror det som uttrykkes av den andre konjunkten. Endelig uttrykker den siste konjunkten at x ved tidspunktet t tror det som uttrykkes av den (k-1)'te konjunkten.

For å få et bedre innblikk i hva (1) egentlig sier kan det være hensiktsmessig å innføre lesemåter for uttrykkene "B/n/(x,y,F)" og "CB/n/(x,y,F)". I det følgende vil vi benytte den følgende lesemåte ved uttrykket "B/n/(x,y,F)", nemlig " x har ved tidspunktet y en n'te ordens tro på at F er tilfelle". Når det gjelder "CB/n/(x,y,F)" skal vi benytte lesemåten "Det at F er logisk sett forenelig med alt det x ved tidspunktet t har en n'te-ordens tro på".

Studerer man teoremet nærmere ser man at punkt (i) uttrykker at ¬F er uforenelig med alt det x ved tidspunktet y har en n'te-ordens tro på hvis og bare hvis x ved tidspunktet y faktisk tror at F er tilfelle. Det andre punktet i teoremet får man naturligvis fra det første ved å sette n=2. Begge disse påstandene holder bare om man forutsetter at Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))).

Det tredje punktet i teoremet gjenspeiler det forhold at trosfeltet av k+1'te orden til x ved tidspunktet y er lukket under logisk konsekvens om man antar at Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))). Hva det sier er at dersom F;1 –> F;2 er en gyldig formel i L, dvs. hvis F;1 impliserer F;2, så vil x ved tidspunktet y ha en k+1'te ordens tro på F;2 vedkommende har en slik tro på at F;1 er sant gitt at Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) holder.

Det fjerde punktet i teoremet kan oppfattes som en generalisering av det foregående. Er F;1&...&F;r –> F en gyldig formel i L har man at x ved tidspunktet y har en k+1'te orden tro på F hvis x ved y har en slik tro på hver av konjunktene i F;1&...&F;r såsant man antar at Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))).

Det femte punktet i teoremet fås fra det fjerde ved å sette r=2 og når det gjelder punkt (vi) ser man at dette lett følger fra punkt (iii).

Det siste punktet uttrykker at x ved tidspunktet y har en k+1'te ordens tro på F om Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) så sant F er en gyldig formel i L. Dette gjenspeiler det forhold at trosfeltet av k+1'te orden til x ved tidspunktet y inneholder ethvert finstrukturert utsagn som er sant i alle mulige verdener dersom dette trosfeltet er deduktivt lukket. Dette siste er netopp hva betingelsen Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) impliserer.

La oss understreke at denne satsen holder også om man overalt erstatter "B" med "K".

Teorem 7.3 Anta <L,<D,g,N,H>> er et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk. Anta Ra er et binært predikat i L der man har for alle wêI og <x,y>êD^2 at:
<x,y>êg(Ra)(w) –> DCL;f(Tr;w(x,y)) & DCL;f(Vt;w(x,y))
Da gjelder at de følgende formler i L er gyldige i L:

(i) Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(B/k+1/(x,y,F;1)Ω.B/k+1/(x,y,F;2) –> B/k+1/(x,y,F;1&F;2))
(ii) Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(B/k+1/(x,y,F;1&F;2) –> B/k+1/(x,y,F;1)Ω.B/k+1/(x,y,F;2))
(iii) Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(B/k+1/(x,y,F;1&F;2) <–> B/k+1/(x,y,F;1)Ω.B/k+1/(x,y,F;2))
(iv) Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(B/k+1/(x,y,F;1–>F;2) –> (B/k+1/(x,y,F;1) –>B/k+1/(x,y,F;2)))

Denne satsen er et korollar til det tredje punktet i Teorem 7.2. Det følger lett om man noterer at formlene F;1&F;2 –> F;i (i=1,2) er gyldige, og dessuten at man har at F;1–> (F;2–> F;1&F;2) er en gyldig formel. Dette gjelder punkt (i) – (iii). Det siste punktet er en nokså triviell konsekvens av (v) i foregående teorem.

Teorem 7.4 Anta <L,<D,g,N,H>> er et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk. Anta Ra er et binært predikat i L der man har for alle wêI og <x,y>êD^2 at:
<x,y>êg(Ra)(w) –> DCL;f(Tr;w(x,y)) & DCL;f(Vt;w(x,y))
Da gjelder at de følgende formler i L er gyldige i L:
(i) Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(CB/k+1/(x,y,F) <–> ¬B/k+1/(x,y,¬F))
(ii) Er F en gyldig formel har man at:
Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –> ¬CB/k+1/(x,y,¬F) er gyldig
(iii) Er F;1–> F;2 en gyldig formel i L har man, om k≥0, at også
Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –> (CB/n/(x,y,F;1) –> CB/n/(x,y,F;2))
er gyldig.
(v) Er F;1,...,F;r,F formler i L & r≥1, og er F–> F;1v...vF;r en gyldig
formel i L, gjelder for alle k≥0 at følgende formel er gyldig:
Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(CB/k+1/(x,y,F) –> CB/k+1/(x,y,F;1)v...vCB/k+1/(x,y,F;r))
(vi) Er F–>F;1vF;2 en gyldig formel i L og k≥0 gjelder at
Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(CB/k+1/(x,y,F) –> CB/k+1/(x,y,F;1) v CB/k+1/(x,y,F;2))
også er en gyldig formel.

(vii) Er F;1 <–> F;2 en gyldig formel i L, er også
Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
CB/n/(x,y,F;1) <–> CB/n/(x,y,F;2) en gyldig formel.

Teorem 7.5 Anta <L,<D,g,N,H>> er et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk. Anta Ra er et binært predikat i L der man har for alle wêI og <x,y>êD^2 at:
<x,y>êg(Ra)(w) –> DCL;f(Tr;w(x,y)) & DCL;f(Vt;w(x,y))
Da gjelder at de følgende formler i L er gyldige i L:

(i) Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(CB/k+1/(x,y,F;1) v CB/k+1/(x,y,F;2) –> CB/k+1/(x,y,F;1vF;2))
(ii) Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(CB/k+1/(x,y,F;1vF;2) –> CB/k+1/(x,y,F;1)v CB/k+1/(x,y,F;2))
(iii) Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>
(CB/k+1/(x,y,F;1vF;2) <–> CB/k+1/(x,y,F;1) v CB/k+1/(x,y,F;2))
(iv) Konj/n,0,k/(B/n/(x,y,Ra(x,y))) –>.
((¬CB/k+1/(x,y,F;1))&CB/k+1/(x,y,F;2)) –> CB/k+1/(x,y,¬F;1&F;2)

Denne satsen forholder seg til Teorem 7.4 som Teorem 7.3 forholder seg til Teorem 7.2. Punkt (i) følger umiddelbart ved hjelp av (v) i Teorem 7.4. Punkt (ii) følger ved hjelp av definisjonen av CB og Teorem 7.2, punkt (iv). Punkt (iii) i teoremet er en umiddelbar følgesetning til de to foregående punkter. Det siste punktet er temmelig lett å bevise og overlates derfor til leseren.

Det bør naturigvis bemerkes at Teorem 7.3 –7.5 fortsatt holder om man overalt erstatter bokstaven "B" med "K" og uttrykket "CB" med "CK".

Den følgende sats gir en oversikt over en rekke temmelig enkle egenskaper ved operatorene B og CB. Siden de enkelte påstandene er helt elementære er det neppe nødvendig å kommentere de enkelte punktene.

Teorem 7.6 Anta <L,<D,g,N,H>> er et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk. Anta Ra er et binært predikat i L der man har for alle wêI og <x,y>êD^2 at:
<x,y>êg(Ra)(w) –> DCL;f(Tr;w(x,y)) & DCL;f(Vt;w(x,y))
Da gjelder at de følgende formler i L er gyldige om F;1,F;2 er formler i L:

(i) Ra(x,y) –> (B(x,y,F;1) –> B(x,y,F;2 –>F;1)
(ii) Ra(x,y) –> (B(x,y,¬F;1) –> B(x,y,F;1 –>F;2)
(iii) CB(x,y,F;1–>F;2) <–> ¬B(x,y, ¬(F;1–>F;2))
(iv) Ra(x,y) –>. B(x,y,F;1<–> F;2) –> (CB(x,y,F;1) <–> CB(x,y,F;2))
(v) Ra(x,y) –>. B(x,y,F;1<–> F;2) –> (B(x,y,F;1) <–> B(x,y,F;2))
(vi) Ra(x,y) –>. (B(x,y,F;1) v B(x,y,F;2)) –> B(x,y,F;1v F;2)
(vii) Ra(x,y) –>. CB(x,y,F;1&F;2) –> (CB(x,y,F;1) & CB(x,y,F;2))
(viii) Ra(x,y) –>. (B(x,y,F;1) & CB(x,y,F;2)) –> CB(x,y,F;1& F;2)
(ix) Ra(x,y) –>. B(x,y,F;1v F;2) –> (CB(x,y,F;1) v B(x,y,F;2))
(x) Ra(x,y) –>. CB(x,y,F;1–> F;2) v (B(x,y,F;2 –>F;1))
(xi) Ra(x,y) –> (CB(x,y,F;1–>F;2) <–> (B(x,y,F;1) –> CB(x,y,F;2)))
(xii) Ra(x,y) –>. B(x,y,F;1–> F;1) –> (B(x,y,F;1) –> CB(x,y,F;2))
(xiii) Ra(x,y) –>. (CB(x,y,F;1) –> B(x,y,F;2)) –> B(x,y,F;1–> F;2)

(xiv) Ra(x,y) –>. (CB(x,y,F;1) –> B(x,y,F;2)) –> (B(x,y,F;1)–>B(x,y, F;2))
(xv) Ra(x,y) –>. (CB(x,y,F;1) –> B(x,y,F;2)) –> (CB(x,y,F;1)–>CB(x,y, F;2))

Også den følgende sats gir en oversikt over en rekke temmelig enkle egenskaper ved operatorene B og CB. Igjen finner vi det uhensiktsmessig å kommentere de enkelte punkter detaljert.

Teorem 7.7 Anta <L,<D,g,N,H>> er et intepretert språk for epistemisk og doxastisk logikk. Anta Ra er et binært predikat i L der man har for alle wêI og <x,y>êD^2 at:
<x,y>êg(Ra)(w) –> DCL;f(Tr;w(x,y)) & DCL;f(Vt;w(x,y))
Da gjelder at de følgende formler i L er gyldige om F;1,F;2 er formler i L:
(i) Ra(x,y)&B(x,y,Ra(x,y)) –>
(B(x,y,B(x,y,F;1)) <–> ¬CB(x,y,CB(x,y,¬F;1)))
(ii) Ra(x,y)&B(x,y,Ra(x,y)) –>
(B(x,y,B(x,y,F;1)) <–> ¬CB(x,y,CB(x,y,¬F;1)))
Ra(x,y)&B(x,y,Ra(x,y)) –>
(iii) (CB(x,y,CB(x,y,¬F;1)) <–> ¬B(x,y,B(x,y,F;1)))
Ra(x,y)&B(x,y,Ra(x,y)) –>
(iv) (B(x,y,CB(x,y,¬F;1)) <–> ¬CB(x,y,B(x,y,F;1)))
Ra(x,y)&B(x,y,Ra(x,y)) –>
(v) (CB(x,y, B(x,y,F;1)) <–> ¬B(x,y,CB(x,y,¬F;1)))
(vi) Ra(x,y) –> (¬CB(x,y,F;1vF;2) <–> (¬CB(x,y,F;1) &¬CB(x,y,F;2)))
(vii) Ra(x,y) –> (CB(x,y,F;1vF;2) <–> (CB(x,y,F;1) v CB(x,y,F;2)))
(viii) Ra(x,y) –> (B(x,y,F;1–>F;2) –> (CB(x,y,F;1) –> CB(x,y,F;2)))
(ix) Ra(x,y) –> (B(x,y,(¬F;1)–>F;1) <–> B(x,y,F;1)
(x) Ra(x,y) –> (B(x,y, F;1–>(¬F;1)) <–> B(x,y,¬F;1)
(xi) Ra(x,y) –> (B(x,y,(¬F;2)–>F;1) & B(x,y, F;2–>F;1) <–> B(x,y,F;1)
(xii) Ra(x,y) –> (B(x,y,F;1) <–> (CB(x,y,F;2) –> CB(x,y,F;1&F;2)))
(xiii) Er F;1 en gyldig formel er også følgende formel gyldig:
Ra(x,y) –> CB(x,y,F;2) –> CB(x,y,F;1&F;2))

I forbindelse med Teorem 7.3 – 7.7 bemerkes det at alle disse teoremene holder om man overalt erstatter bokstaven "B" med "K".

§8 Noen omstridte spørsmål i forbindelse med viten og tro.

De aksiomene om tro og viten som ble angitt i §2 er naturligvis svært svake og sier en kanskje ikke så meget. Men innenfor den rammen som er angitt her er det mulig å formulere en lang rekke påstander som har nær tilknytning til spørsmål som har vært diskutert i forbindelse med troens og kunnskapens logikk.

La oss se på noen setninger i språket til teorien om tro og viten som det kan ha interesse å studere i denne forbindelse. Vi gir her bare en foreløpig og tentativ liste. Mer utførlige kommentarer angående hva som følger fra dem må vi utsette til senere. De setningene som det i første omgang kan være naturlig å se på er lukningene av de følgende formler:

(TT) Tror;w(y,x,t) –>
(Az)(zêfU & s;f(z)=Mg(w: Tror;w(y,x,t)) –> Tror;w(z,x,t))
(VV) Vet;w(y,x,t) –>

(Az)(zêfU & s;f(z)=Mg(w: Vet;w(y,x,t)) –> Vet;w(z,x,t))
(TV) Tror;w(y,x,t) –>
(Az)(zêfU & s;f(z)=Mg(w: Tror;w(y,x,t)) –> Vet;w(z,x,t))

I dette arbeidet vil disse setningene ikke bli inkludert blandt aksiomene. Som man ser sier den første setningen at dersom y er et finstrukturert utsagn som x tror er tilfelle ved t i verdenen w så vil ethvert finstrukturert utsagn z som har som sannhetsmengde Mg(w: Tror;w(y,x,t)) også være et finstrukturert utsagn x tror er tilfelle ved t i verdenen w. Hvis man tillater seg å uttrykke dette i mer vanlig språk kan man si at det innebærer at dersom man tror at y er tilfelle så er det forhold at man tror y også noe man tror. Helt tilsvarende kommentarer kan gis til (2) og (3). Formelen (3) sier at dersom man vet at y er tilfelle så er det at man vet at y er tilfelle også noe man vet. Endelig uttrykker (3), – om man tillater seg å være litt unøyaktig –, at dersom man tror y er tilfelle så vil det forhold at man tror y være noe man vet er tilfelle.

I forbindelse med de tre setningene ovenfor kan det også ha en viss interesse å se på tre setninger som er svakere, nemlig:

(TT') Tror;w(y,x,t) –>
(Ez)(zêfU & s;f(z)=Mg(w: Tror;w(y,x,t)) & Tror;w(z,x,t))
(VV') Vet;w(y,x,t) –>
(Ez)(zêfU & s;f(z)=Mg(w: Vet;w(y,x,t)) & Vet;w(z,x,t))
(TV') Tror;w(y,x,t) –>
(Ez)(zêfU & s;f(z)=Mg(w: Tror;w(y,x,t)) & Vet;w(z,x,t))

Som man ser sier den første av disse setningene at dersom y er noe x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w så finnes det et finstrukturert utsagn z som x også tror ved tidspunktet t i verdenen w og sannhetsmengden til dette utsagnet z er mengden av alle de mulige verdener w hvor det er slik at y beskriver noe x ved tidspunktet t tror i verdenen w. De andre formlene, (VV') og (TV') kan leses på tilsvarende måte. De tre førstnevnte setningene impliserer disse tre hvis vi tar for gitt den teorien som er beskrevet her, fordi det ifølge denne teori alltid til enhver mengde med mulige verdener finnes et finstrukturert utsagn som har denne mengden som sin sannhetsmengde. (Jmf Ax3). Det bør imidlertid noteres at de universelle lukningene av (TT), (VV) og (TV) er ekvivalente med de universelle lukningene av (TT'), (VV') og (TV') om vi antar generelt at
(1) (Aw)(wêI –> CLe(Mg(y: Tror;w(y,x,t)))
(2) (Aw)(wêI –> CLe(Mg(y: Vet;w(y,x,t)))
Den første setningen sier at trosfeltet til x ved t i enhver verden w er lukket under logisk ekvivalens. Den andre setningen sier det tilsvarende om viten.
Man kan være i tvil om tesene (TT), (VV) og (TV) kan oppfattes som nødvendige sannheter. Vi er sterkt i tvil om dette er rimelig. Men på samme måte som det kan ha en viss interesse å se på det tilfelle hvor tros- og kunnskapsfeltet til en person er deduktivt lukket siden dette synes å være fra en logisk synsvinkel et meget interesant tilfelle, kan det også være av interesse å se på det tilfelle der f.eks. trosfeltet til en person ved tidspunktet t ikke bare er deduktivt lukket i den betydning vi tidligere har gjort rede for, men hvor man også legger til ytterligere krav som er relatert til dem som er nevnt ovenfor. Man kan f.eks. betrakte det tilfelle hvor trosfeltet til x ved tidspunktet t i verdenen w, ie. Tr;w(x,t) ikke bare er deduktivt lukket men hvor man også har at følgende holder:

(Ay)(yêTr;w(x,t) –> (Ez)(zêfU & s;f(z)= Mg(w: Tror;w(y,x,t)) & zêTr;w(x,t)))

Tilsvarende krav kan formuleres som er analoge med de andre setningene som er nevnt ovenfor. Hvis man f.eks. er interessert i å utarbeide de setningene som gjelder om trosfeltet og kunnskapsfeltet til en person som virkelig fra en logisk synsvinkel utvikler alle konsekvensene av det vedkommende faktisk tror synes det ikke urimelig å tro at trosfeltet i tillegg til å være deduktivt lukket også bør oppfylle kravet ovenfor. Kanskje bør det også være konsistent og dessuten slik at dersom z er et finstrukturert utsagn som er sant i alle de og bare de verdener hvor trosfeltet til x ved t er deduktivt lukket så skal z også være med i trosfeltet til x ved t i disse verdener. Dette siste kravet kunne formuleres slik:

DCL;f(Tr;w(x,t)) –>
(Az)(zêfU & s;f(z)= Mg(w: DCL;f(Tr;w(x,t))) –> zêTr;w(x,t))

Vi ser først på den følgende sats:

Teorem 8.1 Anta den universelle lukningen av (TT) holder og at man har:
(Aw)(wêI –> CLe(Mg(y: Tror;w(y,x,t))). Da gjelder at den følgende mengde er tautologisk, dvs. identisk med I, for alle aêPt(I):
T;(x,t)(a) => T;(x,t)(T;(x,t)(a))

Bevis: Anta for vilkårlig wêI og aêPt(I) at (1) wêT;(x,t)(a). Dette innebærer i lys av Definisjon 5.3 og Definisjon 3.3 at:
(2) (Ez)(Tror;w(z,x,t) & s;f(z)=a)
Det vi skal vise er at wêT;(x,t)(T;(x,t)(a)). I lys av de nevnte definisjoner er dette ekvivalent med:
(3) (Ep)(Tror;w(p,x,t) & s;f(p) = T;(x,t)(a))
Dette er i sin tur ekvivalent med:
(4) (Ep)(Tror;w(p,x,t) & s;f(p) = Mg(w: (Eq)(Tror;w(q,x,t) & s;f(q)=a)))
Som man ser vil det være tilstrekkelig å bevise (4) Fra (2) følger åpenbart at det må finnes noe z der man har:
(5) Tror;w(z,x,t) & s;f(z)=a. Fra dette og (TT) følger så:
(6) (Ar)(rêfU & s;f(r)=Mg(w: Tror;w(z,x,t)) –> Tror;w(r,x,t))
Nå har man ved hjelp av aksiomene for finstrukturerte utsagn at det til enhver mengde med mulige verdener c finnes et finstrukturert utsagn som har denne mengden c som sin sannhetsmengde. Det følger derfor at det må finnes noe r der rêfU og hvor man har: (7) s;f(r) = Mg(w: Tror;w(z,x,t)). Fra dette og (6) følger:
(8) s;f(r) = Mg(w: Tror;w(z,x,t)) & Tror;w(r,x,t)
Siden det er tilstrekkelig å vise (4) ser man i lys av (8) at det vil være tilstrekkelig å bevise:
(9) Tror;w(z,x,t) <–> (Eq)(s;f(q) =a & Tror;w(q,x,t))
Kondisjonalen mot høyre følger her umiddelbart fra (5). Anta derfor på den annen side at (Eq)(s;f(q) =a & Tror;w(q,x,t)). Da har man:
(10) s;f(q) =a & Tror;w(q,x,t) for noe q. Fra dette , (5) og den andre forutsetningen i teoremet som impliserer at Mg(y: Tror;w(y,x,t)) er lukket under logisk ekvivalens, følger at Tror;w(z,x,t). Dette viser at (9) holder. Man fra (9) og (8) følger som nevnt (4) som i sin tur impliserer wêT;(x,t)(T;(x,t)(a)). Men w var et vilkårlig element i T;(x,t)(a). Det følger at T;(x,t)(a) => T;(x,t)(T;(x,t)(a)) er tautologisk, dvs. identisk med I.
Q.E.D.

Man kan også bevise det omvendte av Teorem 8.1:

Teorem 8.2 Anta man har: (Aw)(wêI –> CLe(Mg(y: Tror;w(y,x,t))) og at den følgende mengde er tautologisk, dvs. identisk med I, for alle aêPt(I):

T;(x,t)(a) => T;(x,t)(T;(x,t)(a))

Da gjelder for alle w,y,x,t:

Tror;w(y,x,t) –>(Az)(zêfU & s;f(z)=Mg(w: Tror;w(y,x,t)) –> Tror;w(z,x,t))

Bevis: Som i forrige bevis har man for alle wêI og aêPt(I) at:

(1) wêT;(x,t)(a) <–> (Ez)(Tror;w(z,x,t) & s;f(z)=a)

(2) wêT;(x,t)(T;(x,t)(a)) <–>
(Ep)(Tror;w(p,x,t) & s;f(p) = Mg(w: (Eq)(Tror;w(q,x,t) & s;f(q)=a)))

Anta nå for vilkårlig y at (3) Tror;w(y,x,t). Da har man yêfU og derfor i lys av aksiomene for finstrukturerte utsagn at (4) Tror;w(y,x,t) & s;f(y) =a for noe aêPt(I). Sammen med (1) impliserer dette: wêT;(x,t)(a). Siden vi fra forutsetningene i teoremet har at T;(x,t)(a) => T;(x,t)(T;(x,t)(a)) er en tautologisk mengde følger wêT;(x,t)(T;(x,t)(a)). I lys av (2) impliserer dette:

(5) (Ep)(Tror;w(p,x,t) & s;f(p) = Mg(w: (Eq)(Tror;w(q,x,t) & s;f(q)=a)))

Anta nå for vilkårlig z at (6) zêfU & s;f(z)=Mg(w: Tror;w(y,x,t)). Fra (5) følger at for noe p har man:

(7) Tror;w(p,x,t) & s;f(p) = Mg(w: (Eq)(Tror;w(q,x,t) & s;f(q)=a))

Vi skal nå vise:

(8) Mg(w: Tror;w(y,x,t)) = Mg(w: (Eq)(Tror;w(q,x,t) & s;f(q)=a))

Anta først Tror;w(y,x,t). Da følger ved hjelp av (4) at Tror;w(y,x,t) & s;f(y) =a. Men fra dette har vi (Eq)(Tror;w(q,x,t) & s;f(q)=a). Det følger at inklusjonen mot høyre i (8) holder. Anta på den annen side at (Eq)(Tror;w(q,x,t) & s;f(q)=a). Da finnes q slik at Tror;w(q,x,t) & s;f(q)=a. Siden CLe(Mg(y: Tror;w(y,x,t))) følger fra dette og (4) at Tror;w(y,x,t). Dette viser at (8) holder. Men fra (8),(7) og (6) følger at Tror;w(p,x,t) & s;f(p)=s;f(z). Fra dette og forutsetningen

(Aw)(wêI –>CLe(Mg(y: Tror;w(y,x,t)))

kan vi så konkludere med at Tror;w(z,x,t). Men z var et vilkårlig objekt der (6) holdt. Det følger at:

(Az)(zêfU & s;f(z)=Mg(w: Tror;w(y,x,t)) –> Tror;w(z,x,t)) Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

§9 Noen flere elementære teoremer i teorien om tro og viten

I akkurat denne paragrafen skal vi for ikke å gjøre våre formler altfor uleselige bruke de forkortelsene som er oppført i den følgende tabell:

"q"	forkorter	"q;(x,t)"
"T"	forkorter	"T;(x,t)"
"CT"	forkorter	"CT(x,t)"
"r"	forkorter	"q;(y,t)"
"S"	forkorter	"T;(y,t)"
"CS"	forkorter	"CT;(y,t)"

I det følgende antas det også selvfølgelig at t er et tidspunkt og det antas at x og y er to distinkte individer.

Teorem 9.1 (i) q=>(T(a) => T(b)) er tautologisk om a=>b er tautologisk.

(ii) r=> (S(a)=> S(b)) er tautologisk om a=>b er tautologisk.

Teorem 9.2 Anta a=>b er en tautologisk mengde. Da har man at følgende mengder også er tautologiske:
(i) q=>T(r=> (S(a)=> S(b)))
(ii) q=>(T(r)=> T(S(a)=> S(b)))
(iii) qΩT(r) => T(S(a)=> S(b))

Problem: Er (+) qΩT(r)ΩT(S(q)) => T(S(T(I)) en tautologisk mengde?

Vi har: q => T(r=> S(I)) er tautologisk.
Videre har man fra dette at: (1) qΩT(r) => T(S(I)) tautologisk
Videre må man ha at (2) qΩT(r) => T(S(q=>T(I))) tautologisk. Dette følger fra (1) rett ovenfor.
Nå har man r=> [S(q=>T(I)) =>. S(q) => S(T(I))] tautologisk
Fra dette følger:
(3) q=>(T(r) => T([S(q=>T(I)) => S(q) => S(T(I))])) er tautologisk
Men det følger også at følgende mengde er tautologisk:
(4) qΩT(r)Ω T(S(q=>T(I))) Ω T(S(q)) => T(S(T(I)))
Herav følger at følgende mengde er tautologisk:
(5) qΩT(r) Ω T(S(q)) =>(T(S(q=>T(I))) => T(S(T(I))). Men fra dette og (2) følger at (+) ovenfor er tautologisk. Problemet ovenfor har derfor en positiv løsning.

Teorem 9.3: Man har at hvis a=>(b=>(c=>d)) er tautologisk så gjelder at
q=> T(a)ΩT(b) => (T(c)=>T(d))
q=> (T(a)ΩT(b)<=> T(aΩb))
er tautologiske.

§9.1 Noen flere teoremer

I denne paragrafen bruker vi de forkortelsene som det ble gjort rede for i forrige paragraf.

Vi ønsker nå å gi bevis for den følgende påstand:

Teorem 9.1.1 qΩT(r)&T(S(q)) => T(S(T(a)) => T(S(T(b))) er tautologisk om a=>b er tautologisk.

Bevis: Anta a=>b er tautologisk. Da har man (1) q=>(T(a)=>T(b)). Siden r innebærer at trosfeltet til b er deduktivt lukket har man da at (2) r&S(q)=>(S(T(a))=>S(T(b))) er tautologisk. Men man skulle lett se at dette impliserer (T1) (2) impliserer (T1) fordi man generelt har at dersom a1Ω...Ωan=>b er tautologisk så har man også at qΩT(a1)Ω...ΩT(an)=>T(b) er tautologisk. Det skulle også være klart, og dette er også et faktum man kan benytte, at dersom aΩb=>(c=>d) er tautologisk så har man at aΩbΩc =>d også er tautologisk. Begge disse to setningene kan benyttes når man skal vise at (2) impliserer (T1).

Noen overfladiske generaliseringer av (T1) kan bevises ved hjelp av den samme metode. De satsene vi har i tankene er:

Teorem 9.1.2 qΩT(r)ΩT(S(q))=>[T(S(T(a1)))Ω...ΩT(S(T(an))) => T(S(T(b)))] er en tautologisk mengde forutsatt at a1Ω...Ωan=>b er tautologisk.

Teorem 9.1.3 qΩT(r)ΩT(S(q))=>[T(S(T(a1)Ω...ΩT(an))) => T(S(T(b)))] er en tautologisk mengde forutsatt at a1Ω...Ωan=>b er tautologisk.

En annen sats som gjelder er følgende:

Teorem 9.1.4 qΩT(r)ΩT(S(q))=> T(S(T(I))) er en tautologisk mengde.

Bevis: Vi har (1) q=> T(I) er tautologisk. Fra dette følger (2) r=> S(q) =>S(T(I)). Men fra dette må man ha: q=> T(r)ΩT(S(q)) =>T(S(T(I))) er tautologisk. Dette var det vi ønsket og bevise.

Fra Teorem 9.1.1 - 9.1.4 følger at Mg(a: wêT(S(T(a)))) er endelig deduktivt lukket om wêqΩT(r)ΩT(S(q)). Dette er tross alt ikke helt trivielt. Kan man vise at Mg(a;wêT(S(T(a)))) er deduktivt lukket i streng forstand under den nevnte forutsetning? Jeg tror at dette skulle være tilfelle. Det ville være interessant om man kunne gi et bevis for det.

La oss vise at man har at følgende holder:

Teorem 9.1.5 Anta D Inkl Pt(I)&D≠ø. Anta at SN(D)=>a er en tautologisk mengde. Da har man at q=> SN(Mg(T(b): bêD) => T(a) er en tautologisk mengde.

La oss gi et bevis for denne setningen. Bevis: Anta (1) wêq. Da har vi at trosfeltet til x ved t i verdenen w er deduktivt lukket. For å være mer nøyaktig har man at (2) DCL(Tr@;w(x,t)). Nå har man, siden vi undertrykker parametrene x og t at Tr@(x,t)= Mg(<w,Tr;w(x,t)>:wêI). Videre T(b)= Mg(w: wêI&bêTr@(x,t)(w)). Nå følger fra wêSN(Mg(T(b): bêD)) at (Ab)(bêD -> wêT(b)). I lys av det som står rett ovenfor må man da ha at: (Ab)(bêD-> bêTr@(x,t)(w)) Men siden Tr@;w(x,t) er deduktivt lukket for w og D dessuten er ikke-tom må det da følge at SN(D)êTr@;w(x,t). Nå var imidlertid en forutsetning at SN(D)=>a var en tautologi. Dette innebærer siden Tr@;w(x,t) er deduktivt lukket at aêTr@;w(x,t). Fra dette følger så i lys av definisjonen av T at wêT(a). Vi har nå vist at hvis wêq & wêSN(Mg(T(b):bêD)) så er wêT(a). Men dette impliserer åpenbart at: q=>SN(Mg(T(b):bêD)) =>T(a) er tautologisk. Dette avslutter beviset.

Man kan vise at det følgende er en tautologisk mengde:

Teorem 9.1.6 r=>[T(SN(D)) <=>SN(Mg(T(x): xêD))] er en tautologisk mengde forutsatt at D er en ikke-tom mengde og at D Inkl Pt(I).

Vi skal gi et bevis for dette. Beviset går slik: Anta for vilkårlig w at (1) wêr og (2) wêT(SN(D)). Fra det siste følger at wêT;(x,t)(SN(D)). Fra de definisjoner vi har gitt følger fra dette at: SN(D)êTr@;w(x,t). Men D er en ikke-tom mengde der D Inkl Pt(I). Videre har vi i lys av (1) at Tr@;w(x,t) er deduktivt lukket. Det følger derfor at cêTr@;w(x,t) om cêD, siden vi må ha SN(D) Inkl c om cêD. Derfor: (Az)(zêD -> zêTr@;w(x,t)). Dette i sin tur innebærer i lys av definisjonen av T(x,t) at: (Az)(zêD -> wêT;(x,t)(z)). Men dette vil si at: wêSN(Mg(T;(x,t)(z) :zêD)). Men i lys av de forkortningskonvensjoner vi har innført følger fra dette wêSN(Mg(T(z):zêD)). Dette viser at den ene halvdelen av satsen holder. Har man på den annen side at wêSN(Mg(T(z):zêD)) følger wêSN(Mg(T;(x,t)(z): zêD)). Dette innebærer at man har: (Az)(zêD -> wêT;(x,t)(z)). Fra de definisjoner vi har gitt følger da (Az)(zêD -> zêTr@;w(x,t)). Men nå er Tr@;w(x,t) deduktivt lukket i vår betydning. Dette innebærer at SN(D)êTr@;w(x,t). Men i lys av definisjonen av T;(x,t) og våre forkortningskonvensjoner er dette ekvivalent med wêT(SN(D)). Dette viser at begge halvdeler av satsen holder og avslutter derfor vårt bevis for den.

Vi nevnte ovenfor den følgende formel som man kan være interessert i å bevise. La oss først gjøre oppmerksom på at q nå forkorter "q;(x,t)", "T(a)" brukes akkurat her som forkortelse for "T;(x,t)(a)", "r" forkorter "q;(y,t)" og "S(a)" forkorter "T;(y,t)". I det følgende forutsettes det også at x og y er distinkte individer. (Men jeg tror ikke at denne forutsetningen er vesentlig). Satsen vi ønsker å gi bevis for er:

Teorem 9.1.7 qΩT(r)ΩT(S(q)).=>SN(Mg(T(S(T(b))): bêD) => T(S(T(a)) er en tautologisk mengde om SN(D)=>a er en tautologisk mengde.

Denne setningen impliserer at Mg(c: wêT(S(T(S(c)))) er lukket under uendelig konjunksjon om wêqΩT(r)ΩT(S(q)). Den impliserer også at denne mengden er lukket under logisk konsekvens. Man setter i så fall D={a} for noe aêU. Nå har vi tidligere vist at I er med i denne mengden. Man har derfor at satsen impliserer at Mg(c:wêT(S(T(c)))) er deduktivt lukket om wêqΩT(r)ΩT(S(q)). La oss gi bevis for påstanden. Vi har: q=> SN(Mg(T(c):cêD)) =>T(a). I lys av Teorem 5. Dette impliserer: r=>S(q) =>S(SN(Mg(T(c):cêD)))=>S(T(a)) I sin tur impliserer dette: r=>S(q)=>SN(Mg(S(T(c)):cêD)) =>S(T(a)). Dette følger ved hjelp av T6. Fra dette kan man så i sin tur slutte at:

qΩT(r)ΩT(S(q)) => T(SN(Mg(S(T(c)):cêD)))=>T(S(T(a))).

Men ved å anvende T6 enda en gang ser man at formelen ovenfor impliserer: qΩT(r)ΩT(S(q)) => SN(Mg(T(S(T(c))):cêD)) => T(S(T(a))) som er det vi ønsker. Dette avslutter beviset for satsen.

§10 Avslutning og oppsummering.

I denne delen av det foreliggende arbeid har vi presentert en teori om tro og viten. Det er selvfølgelig flere spørsmål man kan stille i forbindelse med denne teorien. For det første kan man stille spørsmålet om teorien faktisk er holdbar, om man virkelig kan tro at den er riktig. For det andre kan man spørre om hvordan teorien er relatert til mer klassiske kunnskapsteoretiske spørsmål og hvordan den er relatert til lignenede teorier hos andre, mer moderne, filosofer. For det tredje kan man spørre om hvordan teorien kan utvikles videre, hvilke anvendelsesområder den har og hva den kan bidra med å kaste lys over innenfor kunnskapsteorien og beslektede områder.

La oss først drøfte det første spørsmålet. Er teorien holdbar? Når det gjelder akkurat dette spørsmålet bør man notere at teorien er helt eksplisitt utformet som en første-ordens teori. Dette innebærer at vi

(i) har beskrevet språket til teorien helt tydelig,

(ii) har angitt de logiske og ikke-logiske aksiomene som inngår i den helt eksplisitt
(iii) har angitt nøyaktig hvilke begreper som ikke er definert og nøyaktig hvilke begreper som er innført ved definisjon,
(iv) har angitt nøyaktig hvilke teoremer vi mener kan utledes i teorien og i den utstrekning vi har funnet det nødvendig gitt bevis for disse teoremene.

Når det derfor gjelder spørsmålet om teoriens holdbarhet kan man knytte drøftingen til disse fire punktene.

La oss først kommentere språket til teorien. Når det gjelder det rent logiske vokabularet i vår teori består dette av de vanlige setningslogiske konnektivene og kvantorene.

Det virker usannsynlig at noen skulle kunne sette alvorlig spørsmålstegn ved meningsfullheten av disse konstruksjonene. De utgjør derfor en totalt uproblematisk del av språket til teorien.

Ved siden av de rent logiske konstruksjonene i teorien inngår også de to mengdeteoretiske predikatene "x er en mengde" og " x er et element i mengden y". Er disse predikatene meningsfulle? Er de fullstendig uproblematiske fra en vitenskapelig synsvinkel? Til dette er bare å svare at vi ikke i noen matematiske eller logiske skrifter vi har stiftet bekjentskap med har sett noen seriøse argumenter mot det man med et litt uklart uttrykk kunne kalle den "vitenskapelige meningsfullheten" til disse uttrykk. De synes å gjennomsyre all tale og tenkning innenfor matematikken på en slik måte at det er svært vanskelig å se hvordan man skulle kunne greie seg uten dem. En annen sak er selvfølgelig hvilke generelle setninger som inneholder disse predikatene som gjelder. Når det gjelder dette har det vært, er, og vil det sannsynligvis være delte meninger. Man kan ikke på det nåværende tidspunkt si at det hersker noen allmenn enighet om hvilke lover som gjelder for mengder.

I teorien om tro og viten inngår også i det ikke-logiske vokabularet til språket de følgende predikater, nemlig "x er en mulig verden", "x er et utsagn" og "x er en mulig verden hvor utsagnet y er sant". I forbindelse med disse predikatene vil det sikkert være noen som vil stille spørsmålet om meningsfullheten til dem.

Man bør her, slik som antydet rett ovenfor, holde fra hverandre to spørsmål. På den ene side har man spørsmålet om disse predikatene har mening. På den annen side har man spørsmålet, gitt at de er meningsfulle, hvilke lover som gjelder for dem. I denne forbindelse er det fullt mulig å hevde at disse predikatene forsåvidt er meningsfulle, men at det ikke faller noe inn under de begreper de uttrykker. Det er selvfølgelig ikke noe selvmotsigende i å hevde at uttrykket "x er en logisk mulig verden er menigsfullt", men samtidig at setningen "Det finnes logisk mulige verdener" er usann. Tilsvarende ved de andre predikatene. Man kan uten å motsi seg selv hevde at det ikke finnes noen mulige verdener og utsagn og derfor at det heller ikke finnes noe par av objekter x,y hvor det er slik at x er en mulig verden hvor utsagnet y er sant. Når det imidlertid gjelder meningsfullheten til de nevnte predikatene bør det nevnes at vi ikke har sett noen som har utformet tydelig en teori om hva som menes med et meningsfullt predikat og som på basis av denne teori og andre plausible premisser har vist at det følger at de nevnte tre predikater er uten mening. Det samme kan sies om de resterende uttrykk som inngår i det ikke-logiske vokabularet i språket til teorien om tro og viten. Dette gjelder som man skjønner predikatene "x er et tidspunkt", "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y", "x er et finstrukturert utsagn", "x er en verden hvor det finstukturerte utsagn y er sant" og de to predikatene "z er noe x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w" og "z er noe x vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w".

Konklusjonen så langt er derfor at det ikke så langt har blitt formulert noen avgjørende argumenter som viser at et eller flere av de predikater som inngår i det ikke-logiske vokabularet er meningsløse.

La oss nå gå igjennom aksiomene i teorien og drøfte dem. Aksiomene kan inndeles i seks grupper.

(1.1) De rent logiske aksiomene i teorien.
(1.2) De mengdeteoretiske aksiomene i teorien.
(1.3) De aksiomene som utgjør grunnlaget for teorien T1.
(1.4) De aksiomene som karakteriserer egenskapene til finstrukturerte utsagn.
(1.5) De aksiomene som sier noe om mengden av tidspunkter og som karakteriserer før-relasjonen mellom tidspunktene.
(1.6) Aksiomene for predikatene "z er noe x tror ved t i verdenen w" og "z er noe x vet ved t i verdenen w".

Når det gjelder de rent logiske aksiomene i teorien utgjør disse et vanlig standardsett for predikat logikk. Hvis man derfor aksepterer vanlig klassisk predikatlogikk skulle det derfor være vanskelig å se at det kan rettes noen seriøse innvendinger mot dem.

Noe av det samme kan sies om de rent mengdeteoretiske akiomene som inngår i teorien. Som man forstår er dette en variant av et vanlig sett av aksiomer for Zermelo-Fraenkel mengdelære utvidet med utvalgsaksiomet og modifisert slik at man tillater eksistensen av ikke-mengder. Vi har i endel andre arbeider diskutert sider ved det mengdeteoretiske systemet som legges til grunn her. Det skulle derfor være unødvendig å gå i detalj på dette punkt. Hovedsaken er imidlertid at det ikke er spesielt interessant å opponere mot akkurat denne delen av teorien. Grunnen er at svært mange logikere og matematikere synes å akseptere at Zermelo-Fraenkel mengdelære er et noenlunde fornuftig mengdeteoretisk system. Det virker også som det er rimelig å hevde at hvis man skal foreslå et mengdeteoretisk system som virkelig imøtekommer de behov man har for å postulere eksistensen av mengder i matematikken og naturvitenskapene, og forøvrig de andre vitenskaper hvor man gjør bruk av matematikk, er det vanskelig å se at et system som er noe særlig svakere enn ZFC vil føles som dekkende. Det bør også nevnes at selve den mengdeteoretiske delen av vår teori ikke er hovedsaken. Man kan godt tenke seg de mengdeteoretiske aksiomer vi har oppført erstattet med andre og svakere prinsipper.

Konklusjonen så langt er derfor at akkurat denne delen av teorien kan oppfattes som nokså ukontroversiell.

La oss så si noe om aksiomene i T1, som utgjør den tredje gruppen av aksiomer. Vi begir oss nå inn på et område som åpenbart bør oppfattes som mer kontroversielt. Det er klart at de aksiomene det her siktes til ikke på noen måte er direkte innlysende. Hvis man virkelig tror på eksistensen av mulige verdener og utsagn i den betydningen som ligger til grunn her innebærer dette at man aksepterer at det på prinipielt grunnlag ikke er noe i veien for å hevde at språk kan oversettes til hverandre. I ethvert rent deskriptivt språk vil det da finnes synonymitetsrelasjoner. Videre kan det også sies at man indirekte aksepterer et skille mellom nødvendig og tilfeldig sanne setninger. Intet av dette er uomstridt. I og for seg skal det ikke tas noen definitiv stilling til dette her. Det som derimot kan hevdes med en viss plausibilitet er at hvis man aksepterer at det finnes utsagn og at utsagn er den type meningsinnhold som uttrykkes av deskriptive setninger, ie. setninger som enten er sanne eller usanne, er det ikke urimelig å gå med på eksistensen av mulige verdener. Disse kan da f. eks. oppfattes som maksimalt konsistente utsagnsmengder. Videre synes ikke de enkelte konkrete aksiomene om utsagn som inngår i teorien å fortone seg spesielt urimelige gitt disse forutsetningene. Å hevde at det til ethvert utsagn finnes en mengde med mulige verdener som utgjør utsagnets sannhetsmengde kan neppe karakteriseres som utfordrende; kanskje snarere som en nødvendig sannhet. Heller ikke de andre aksiomene i denne del av teorien kan da karakteriseres som vilkårlige eller urimelige. Vi skal ikke gå inn på en mer utførlig drøfting av dem akkurat her, men henviser til Rognes [3] hvor teorien T1 tross alt diskuteres ganske utførlig.

Det kan være hensiktsmessig å diskutere akiomene om finstrukturerte utsagn og aksiomene om tros- og kunnskaps-relasjonene under ett. At det finnes en mengde med 4-tupler <z,x,t,w> slik at z er noe x tror ved tidspunktet t i verdenen w kan virke dristig. Dette kan neppe sies å være helt innlysende. Men det er implisert av det følgende aksiom:

Ax9 (Aw)(wêI –> (Ez)(M(z) & z = Mg(<y,x,t>: Tror;w(y,x,t)))

Når det gjelder dette aksiomet er det delvis tatt med av enkelhetsgrunner, men det har også, såvidt vi kan se, en viss plausibilitet. Er wêI og tenker man seg at têT vil det være litt eiendommelig om mengden av alle tripler <y,x,t> der y er et finstrukturert utsagn som x tror ved tidspunktet t i verdenen w ikke skulle eksistere. Dette måtte i så fall innebære at denne mengden i en viss forstand var "svært stor" eller med andre ord en klasse. Men det er ikke helt lett å skjønne hvorfor man skulle insistere på denne muligheten bør være åpen.

Når det imidlertid gjelder Ax6 virker dette aksiomet temmelig uskyldig gitt at man aksepterer at "Tror;w(y,x,t)" og "Vet;w(y,x,t)" er meningsfulle predikatkonstruksjoner. Det eneste ankepunkt måtte i så fall være at aksiomet impliserer at y må være et finstrukturert utsagn om y er noe x vet eller tror er tilfelle ved t i verdenen w. Men det er grunner til å tenke seg at det som er objekter for tro og viten, den type ting man tror og vet, ikke er presise deskriptive utsagn i den betydning vi tidligere har forsøkt å gjøre rede for. Tror man at 2+2=4 er det ikke dermed sagt at man tror at 5^4 > 2^9. Man kan godt tenke seg en person som tror det første er tilfelle, men som benekter det siste. Men begge setningene er nødvendig sanne og uttrykker derfor det samme rent deskriptive utsagn. I den utstrekning man med "finstrukturert utagn" mener noe slikt som den type av entiteter som det er logisk mulig at kan være objekter for tro og viten virker ikke aksiomet urimelig. Det er kanskje berettiget å si at aksiomet filosofisk sett ikke er nøytralt. Men hvorfor skulle man ikke studere en teori som filosofisk sett ikke var nøytral? I alle fall kan ikke det i seg selv oppfattes som noe godt argument for at det er galt.

Når det gjelder Ax7 og Ax8 virker disse setningene rimelige. Det synes svært vanlig å anta at tro er et nødvendig vilkår for viten. Vet en person at noe er tilfelle må det også være slik at vedkommende tror at dette er tilfelle. Den samme grad av plausibilitet synes å være knyttet til Ax8. Vet en person at noe er tilfelle må dette nødvendigvis være tilfelle. Siden det her antas at objektene for viten er finstrukturerte utsagn synes det derfor naturlig å si at hvis y er noe x vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w så er w en verden hvor det finstrukturerte utsagnet y er sant.

Det gjenstår å si noe om de aksiomene som direkte karakteriserer klassen av finstrukturerte utsagn, nemlig aksiomene Ax3 – Ax5. Av disse skulle man tro at Ax5 er helt uproblematisk når man husker på at uttrykket "True;f(w,x)" er ment å skulle leses "w er en logisk mulig verden hvor det finstrukturerte utsagnet x er sant". Det skulle vel da være klart at vi fra True;f(w,x) skulle kunne slutte at w er en logisk mulig verden og x et finstrukturert utsagn. Videre virker også Ax4 rimelig. Gir tanken om at det skulle finnes finstrukturerte utsagn mening virker det ikke urimelig å tro at om x er et slikt utsagn så finnes et også en mengde med mulige verdener som er nøyaktig mengden av de mulige verdener hvor utsagnet x er sant.

Det mest kontroversielle av disse aksiomene er Ax3. Dette sier, som man husker, at det til enhver mengde med mulige verdener a finnes minst et finstrukturert utsagn som er sant i nøyaktig de verdenene som inngår i a. Følgende betraktninger ligger til grunn for at vi har tatt med dette aksiomet her. For det første er det analogt med det vi har kalt "Fullstendighets-aksiomet" for utsagn som inngår i teorien T1.[5] For det andre synes det å gjøre teorien om finstrukturerte utsagn mer avrundet og enklere. Hvis man ikke aksepterer noe slikt som dette må man angi hvilke utsagn som det svarer ett eller flere finstrukturerte utsagn til. Men det virker vanskelig å gjøre dette på noenmåte som ikke kan fortone seg for en som mer eller mindre ad-hoc. Det virker derfor rimelig å skjære igjennom på dette punkt og postulere at det til enhver mengde med mulige verdener finnes et finstrukturert utsagn som har denne mengden som sin sannhetsmengde.

Det gjenstår å si noen ord om de aksiomene som har med tid å gjøre, nemlig Ax1 og Ax2, samt Ax 2.1 – Ax 2.6. Vi har postulert at det finnes en mengde med tidspunkter og en bestemt relasjon, kommer-før-relasjonen mellom disse tidspunktene. Videre sier disse aksiomene at mengden av tidspunkter er en lineær og tett ordning som er uendelig i begge retninger. Det må innrømmes at denne tidsteorien er temmelig primitiv og en smule naiv. Predikatene "x er et tidspunkt" og " x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y" er ikke relative til mulige verdener. Dette innebærer at man ikke innfører en mengde med tidspunkter for hver mulig verden og en ordningsrelasjon over disse tidspunktene som eksisterer i hver mulig verden. Mao. man innfører ikke en familie av relasjoner <T;w,Før;w> der T;w er klassen av alle de tidspunkter som eksisterer i w og hvor Før;w er en relasjon som ordner elementene i T;w i en eller annen rekkefølge. Tiden slik den er tenkt i den foreliggende teori er kan i en viss forstand ies å være logisk sett absolutt. Kommer et tidspunkt før et annet vil det gjøre det i alle mulige verdener, det vil altså være nødvendigvis tilfelle. Videre skulle det også være klart at vi her opererer med en tid som også i fysisk forstand tenkes å være absolutt, slik at betegnelsen "en smule naiv" også er treffende om man har fysikken i tankene.

Imidlertid har vi valgt å legge til grunn en slik teori om tid av rene enkelhetsgrunner. Betraktninger om tid spiller en forholdsvis beskjeden rolle i de fleste av våre resonnementer og i den utstrekning det har vært nødvendig for oss å omtale tidsforhold er teorien tilstrekkelig. Det er selvfølgelig vanskelig å ignorere tidsforhold i en teori om viten og tro fordi det åpenbart er slik at vår tro og viten endrer seg med tiden. På en eller annen måte må derfor tidspunkter og relasjoner mellom tidspunkter komme inn i teorien. Vi har valgt å gjøre dette på den måten som er blitt beskrevet, men det skulle neppe være så vanskelig for en med større kompetanse i forbindelse med tidsbegrepet å endre teorien slik at den blir mer i harmoni med moderne fysikk.

La oss nå se på det andre punktet som ble nevnt innledningsvis. Det dreier seg om spørsmålet om hvordan den teorien som har blitt presenterert er relatert til andre teorier av lignende karakter og dessuten hvordan den forholder seg til mer klassiske erkjennelsesteoretiske synspunkter. Når det gjelder det første virker det mest fruktbart å sammenligne teorien med den doxastiske og epistemiske logikk som Hintikka fremsetter i sitt velkjente arbeid "Knowledge and Belief". Dette skal vi da også gjøre.

---

[5] Se Rognes [2], side §2, §2.4

Vi vil imidlertid først komme med enkelte kommentarer angående hvordan teorien er relatert til mer klassiske erkjennelsesteoretiske synspunkter og problemer. I denne forbindelse er det ytterst viktig å understreke teoriens beskjedene karakter og dessuten minne om at den primært er en rent logisk teori som sier noe om hvilke slutninger man kan trekke gitt at visse påstander om hva en person vet og tror. Dette innebærer at teorien selv ikke sier noe ubetinget om hva man faktisk vet. Hvis man derfor stiller spørsmålet om hva man vet i den betydning som vi her har i tankene innenfor de enkelte vitenskaper er resultatet altså ganske fattigslig.

Dog sier teorien noe om hva det er mulig å få kunnskap om. Forutsetter man at kunnskapsfeltet til en person er deduktivt lukket innebærer dette at vedkommende vet enhver logisk sett nødvendig sannhet. I den utstrekning man derfor kan si at logikkens og matematikkens setninger uttrykker logisk nødvendige sannheter kan disse sies å ligge innenfor kunnskapens grenser i den grad i den grad en person er fullt ut i stand til å utvikle de rent logiske konsekvensene av det vedkommende vet. Teorien kan derfor i en viss forstand si noe om hva det er mulig å vite.

Når det gjelder spørsmålet om kunnskapens grenser er teorien slik vi så langt har formulert den helt åpen. Den er like forenelig med for eksempel den påstand at det er logisk mulig å vite at Gud eksisterer som den er med den påstand at det er logisk umulig for noen å vite at Gud eksisterer. Den er like forenelig med den påstand at det er logisk mulig for en person å vite at ethvert menneske har en udødelig sjel som den er forenelig med den påstand at det er logisk umulig at noe menneske har en udødelig sjel. Teorien avgjør derfor ingen spørsmål av denne typen. Faktisk er teorien enda svakere. En nærmere inspeksjon av aksiomene viser at den logisk sett er fullt ut forenelig med det ekstreme standpunkt at ingen vet eller tror noe ved noe tidspunkt.[6] Men den er også forenelig med den tanke at det er logisk mulig at man kan få mer og mer kunnskap om verden.

Det kan være hensiktsmessig å gå litt mer detaljert til verks her. La oss med uttrykket "V;(t,w)" betegne klassen av alle de utsagn som en eller annen vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w. Dette innebærer at V;(t,w) er mengden Mg(y: (Ex)(Vet;w(y,x,t))). La oss så med "V*;(t,w)" betegne det utsagn som er sant i nøyaktig de og bare de mulige verdenene hvor alle de finstrukturerte utsagnene i V;(t,w) er sanne. Med andre ord setter vi:

V*;(t,w) = s;-1(Mg(w: wêI & (Ay)(yêV;(t,w) –> wês;f(y))))

Den teorien som vi her har formulert er da like forenelig med den påstand at det skulle finnes en logisk mulig verden w og en uendelig sekvens av tidspunkter
s: N–(1-1)–> T der s(n) < s(n+1) for alle nêN slik at man har:

s(V*;(s(n+1),w)) SInkl s(V*;(s(n),w)) for alle n

og hvor man dessuten har: SNu/n,0,∞/(V*;(s(n),w)) = s;-1({w}).

V*;(t,w) kan sies å representere summen av alt man vet ved akkurat tidspunktet t i verdenen w. Det tesen ovenfor sier er derfor at det finnes en mulig verden w og en uendelig sekvens av tidspunkter s: N–(1-1)–>T der s(n+1)>s(n) som er slik at summen av alt man vet ved et tidspunkt i denne sekvensen i verdenen w impliserer alt det man vet ved tidligere tidspunkter og hvor summen av det man vet ved alle tidspunkter i verdenen w utgjør en fullstendig teori, dvs. en teori som er ekvivalent med et maksimalt sterkt utsagn som er sant i en og bare en verden, i dette tilfellet verdenen w.

Finnes en slik mulig verden w? Siden I skal omfatte alle logisk mulige verdener er det kanskje ikke helt utenkelig at det faktisk er sant. Men det må innrømmes at det virker svært vanskelig å utlede eksistensen av en slik mulig verden fra andre premisser som kunne virke overbevisende på formodentlig kompetente personer. Setningen har derfor karakter av en mer spekulativ gjetning. La oss kalle denne tesen H1. Helt eksplisitt kan den formuleres slik:

---

[6] Mao. den tanke som kan formaliseres slik: ¬(Ey)(Ex)(Et)(Vet;a(y,x,t) v Tror;a(y,x,t)) hvor a er den aktuelle verden. Teorien er også forenelig med den tanke at det er logisk umulig å tro noe, dvs. forenelig med: (Aw)(wêI –> ¬(Ey)(Ex)(Et)(Tror;w(y,x,t))).

H1 (Ew)(Es)(wêI & s: N–(1-1)–> T &
(An)(nêN –> s(n)<s(n+1)) &
(An)(nêN –> s(V*;(s(n+1),w)) SInkl s(V*;(s(n),w))) &
SNu/n,0,∞/(V*;(s(n),w)) = s;-1({w}))

Det er imidlertid en annen tese som er av interesse når man diskuterer spørsmålet om hva teorien sier om kunnskapens grenser. Denne tesen har en noe annen karakter enn den som ble nevnt rett ovenfor. Den sier at i enhver logisk mulig verden vil det ved ethvert tidspunkt være uendelig mange mulige verdener som logisk sett er forenelige med absolutt alt som man vet inntil og inkludert dette tidspunkt. Alt man vet inntil og inkludert tidspunktet t kan representeres ved utsagnet:

SNu(Mg(V*;(t',w): t'≤t))

At en mulig verden w er logisk sett forenelig med utsagnet u innebærer at w er med i sannhetsmengden til u, med andre ord at wês(u). Tesen kan derfor formuleres presist innen rammen av L;e[∏] på den følgende måte:

H2 (Aw)(wêI –> (At)(têT –> Cd(s(SNu(Mg(V*;(t',w): t'≤t)))) ≥ Aleph;0))

Heller ikke denne setningen avgjøres av teorien. Tesen kan formuleres på en litt annen måte. Enhver mulig verden w' kan en-entydig tilordnes en teori, nemlig klassen av alle de utsagn som er sanne i den. La oss betegne klassen av alle de utsagn som er sanne i verdenen w' med T;w'. T;w' er da

Mg(u: uêU &True(w',u)).

For hver verden w' som er med i s(SNu(Mg(V*;(t',w): t'≤t))) vil det derfor svare en-entydig en teori, nemlig T;w' som logisk sett er forenelig med utsagnet SNu(Mg(V*;(t,w): t'≤t)). H2 kan derfor sies å uttrykke den tanke at det i enhver logisk mulig verden ved ethvert tidspukt vil finnes et minst tellbart uendelig mangfold av teorier som innbyrdes er uforenelige, men der hver teori logisk sett er forenelig med summen av alt det man vet inntil og inkludert dette tidspunkt. Forsåvidt kan man se i H2 en presisert versjon av den tese som ofte kalles "Tesen om teorimangfoldet". Denne tesen legger visse begrensninger, om den er riktig, på hva det logisk sett er mulig å vite. Den innebærer at uansett hvor mye kunnskap vi får vil det alltid være uendelig mange konsistente utsagn som ikke kan avgjøres på basis av denne kunnskap. Den impliserer også at det ikke kan finnes en person som i en verden w ved et gitt tidspunkt t ved alt som er sant i denne verdenen. Hvis Gud er et vesen som er allvitende i denne forstand impliserer H2 at det er logisk nødvendig at Gud ikke eksisterer.

SNu(Mg(V*;(t,w): têT)) er konjunksjonen av absolutt alle utsagn som en eller annen vet ved et eller annet tidspunkt i verdenen w. Litt kortere kunne man si at dette utsagnet representerer summen av absolutt alt man vet i verdenen w og ikke bare summen av alt man vet i verdenen w inntil og inkludert et bestemt tidspunkt t. Det kan nevnes at H2 tilsynelatende ikke er uforenelig med den følgende påstand, nemlig at det finnes en mulig verden w hvor man har at SNu(Mg(V*;(t,w): têT)) = s;-1({w}). Formulert litt anderledes: Hvis H2 og den følgende tese legges til den teorien som har blitt beskrevet får man en teori som er konsistent om den ikke-utvidete teorien er det:[7]

---

[7] Vi skal ikke gi et formelt bevis for dette her. Selvom det strengt tatt ikke er så vanskelig å se hvordan det skal gjøres vil et helt formelt bevis bli svært langt og dessuten bare ha marginal interesse såvidt jeg kan se.

H3 (Ew)(wêI & SNu(Mg(V*;(t,w): têT)) = s;-1({w}))

Det er også en annen, sterkere tese som enn H2 som er av en viss relevans når det gjelder de spørsmål som vi diskuterer her, nemlig spørsmålet om kunnskapens grenser. Tesen er denne:

H4 (Aw)[wêI –> (Ea)(M(a) & Cd(a)≥Aleph;0 & a Inkl I&
(At)(têT –> a Inkl s(SNu(Mg(V*;(t',w): t'≤t)))))]

Det denne setningen sier er at det er logisk nødvendig at det finnes en mengde med mulige verdener som er minst tellbart uendelig og som er slik at ved ethvert tidspunkt t vil den være inkludert i sannhetsmengden til det utsagnet som representerer summen av alt det man vet inntil og inkludert tidspunktet t. Det er lett å vise at H4 er uforenelig med H3 og at setningen impliserer H2. (Leseren kan på egenhånd, som en øvelse, gjøre dette.) Igjen sier tesen noe om grensene for vår kunnskap. Det vil alltid være teorier som er forenelig med alt det vi vet ved et gitt tidspunkt, men som er slik at uansett hvor mye kunnskap vi får etter dette tidspunkt vil denne ytterligere kunnskapen ikke kunne avgjøre om teorien som helhet er riktig eller ikke.

Heller ikke H4 avgjøres av den teorien om tro og viten som her har blitt formulert. Dette innebærer at hverken H4 eller negasjonen av H4 kan utledes som et teorem i denne teorien.

La oss oppsummere overveielsene så langt. Strengt tatt sier ikke teorien om tro og viten noe direkte om grensene for den menneskelige erkjennelse. Men diskusjonen ovenfor viser at det er mulig å formulere en lang rekke teser som mer eller mindre direkte sier noe om dette innenfor rammen av språket til teorien, dvs. språket L;e[∏]. Vi har nå gitt en rekke eksempler, først og fremst H1 – H4. Det er derfor mulig innenfor teoriens ramme å utvikle og undersøke konsekvensene av disse tesene. Teorien om tro og viten, VT, kan derfor selvfølgelig utvides på mange ulike måter som gjør at man får teorier som tydeligere har en klart epistemologisk relevans.

Blandt de mer grunnleggende spørsmål innen erkjennelsesteorien er ikke bare de spørsmål som dreier seg om kunnskapens utstrekning og grenser de eneste. Man kan også stille spørsmål om hvordan man får viten og hvordan man kan utvide sine kunnskaper. Når det gjelder dette er det klart at kunnskap kan erhverves på mange forskjellige måter. Man kan lære fra andre noe man ikke visste fra før og mye vesentlig kunnskap kan faktisk fås på denne måten. Man kan også lære ved å lese og kanskje enda mer vesentlige kunnskaper kan oppnås på dette vis.

Den viktigste metoden for å få ny kunnskap tror jeg imidlertid er hva man kan kalle for prøve-og-feile metoden. Hvis man f.eks. ønsker å få kunnskap av matematisk natur synes det ikke å være noen særlig annen mulighet enn at man forsøker å stille et problem og så formulerer en eller flere satser som gir en en tentativ løsning på dette problem. Neste skritt består så i at man kritisk betrakter de satser man har skrevet ned. Kanskje oppdager man da at formuleringene ikke er tilstrekkelig klare. Det er da neppe noen annen mulighet enn å reformulere dem slik at de blir tilstrekkelig klare. Hvis man dernest ønsker å gi bevis for satsene er det heller ikke i de fleste tilfelle noen annen mulighet enn å bruke prøve-og-feile metoden. Man stiller forsøksvis opp noe man tror er bevis for satsene. Dernest vil fremgangsmåten være at det man kontrollerer at det man har skrevet opp tilfredstiller de kravene som stilles til et bevis. Kanskje det viser seg at enkelte av de punktene i den resonnementskjeden man har foreslått ikke oppfyller kravene. Man får da prøve på nytt. Dette innebærer at man får ta på seg de anstrengelsene med å skrive opp nye forslag til bevis for dernest å kontrollere dem. I noen tilfelle kan det være at man faktisk lykkes og greier å gi et bevis. I så fall vil man selvfølgelig ikke bare ha fått visshet om at den satsen man skrev opp er riktig, men man vil også ha fått kunnskap om den prosessen – i mange tilfelle en uhyre strevsom prosess – som førte frem til dette resultatet. Men det kan også være at man gjentagne ganger ikke lykkes og snarere etterhvert ledes til den hypotese at en eller flere av de opprinelige satser er gale. Kanskje man så forsøker å stille opp tentative bevis for at en av dem er gal og etter gjentagne forsøk lykkes i dette. I så tilfelle vil man ha nådd en ny innsikt selvom den er av en negativ karakter.

I det store og hele er det rimelig å tro at denne skissen faktisk gir en et rimelig bilde av hvordan man i praksis arbeider seg frem til innsikter innenfor logikken og matematikken. Men det er ikke uberettiget å tro at metoden er den man bruker også ved forsøk på å vinne kunnskap som ikke er av logisk-matematisk karakter. Er H en kontingent hypotese, og derfor en setning som det hverken er logisk nødvendig at er sann eller som det er logisk nødvendig at er usann, er det en viss mulighet for å avsløre at den er usann ved å studere nærmere hva som følger fra den. Dernest kan man undersøke hvordan disse følgesetningene passer sammen med det man på forhånd vet, eller det man vet at man kan finne ut ved nye undersøkelser, f.eks. av empirisk art. For hvis en av følgesetningene faktisk strider mot noe man vet, eller som det er mulig å bringe på det rene ved ytterligere undersøkelser, kan man slutte at H er usann. Den samme metode som den som ble beskrevet ovenfor kan derfor benyttes også her. Man vil ved testingen av H kanskje forsøke å formulere en setning S som kan kontrolleres direkte og dernest undersøke om S kan utledes fra H. Man vil så ved prøving og feiling forsøke å konstruere et bevis for at S er en logisk konsekvens av H. I noen tilfelle kan dette være lett. I andre tilfelle kan det være vanskelig og problemet kan beskjeftige en i meget lang tid. I tilfelle man kan konstatere at S logisk sett følger fra H og f.eks. ved observasjon konstatere at S er gal kan man så med rette slutte at H er gal. Det synes ikke uberettiget å formode at kanskje all ny genuin kunnskap på en eller annen måte oppnås ad denne vei.

Endel spørsmål som angår forholdet mellom den teorien om tro og viten som har blitt fremstilt her og mer "klassiske" spørsmål av kunnskapsteoretisk art har nå blitt drøftet. La oss på dette punkt sammenligne teorien med den doxastiske og epistemiske logikk som Hintikka fremsetter i sitt arbeid "Knowledge and Belief".

Det bør da først nevnes at rammen for vår teori er temmelig forskjellig fra Hintikkas. Vi arbeider eksplisitt med mulige verdener, utsagn og finstrukturerte utsagn. Intet av dette figurer på den samme eksplisitte måte i Hintikkas arbeid.

Hintikka tar sitt utgangspunkt i et system av modellmengder og visse alternativrelasjoner over disse modellmengdene. Forsåvidt svarer disse modellmengdene til mulige verdener, men det vil føre for langt å gi en detaljert redegjørelse for hvordan Hintikkas modellmengder og modellsystemer er relatert til vår teori. Visse hovedtrekk skulle det imidlertid være mulig å gjengi uten at man gir en forvrengt fremstilling av hovedtankene.

I sitt arbeid studerer Hintikka både setningslogiske språk utvidet med epistemiske og doxastiske operatorer. Men også de spørsmål som oppstår når man innfører kvantorer i forbindelse med slike operatorer diskuteres inngående. Vi skal her hovedsakelig kommentere de sidene ved Hintikkas teori som har med setningslogikk å gjøre.

Betraktes Hintikka arbeid fra en formell synsvinkel kan man si at det tas utgangspunkt i et vanlig språk for setningslogikk av den typen som ble nevnt i Del I, §2. Dette språket utvides så med de følgende operatorer: "a tror at F", "Det er forenelig med alt a tror at F", "a vet at F", "Det er forenelig med alt a vet at F". Disse operatorene symboliseres med henholdsvis "B;a(F)", "C;a(F)", "K;a(F)" og "P;a(F)". De to operasjonene C;a og P;a vil da være det som i henholdsvis doxastisk og epistemisk logikk svarer til logisk mulighet i vanlig modallogikk. Formlene i dette språket dannes etter de vanlige regler. Hintikka definerer så ved hjelp av disse begrepene hva som menes med en modellmengde og hva som menes med et modellsystem. Videre angis kriterier får når en setning i dette språket er "forsvarlig" og når en mengde med formler i språket kan kalles forsvarlig. Hintikka definerer også hva som menes med at en setning er en "virtual" konsekvens av en annen.

Kalles dette språket for L vil det følgelig være en viss mengde med formler Δ i L som er forsvarlige i henhold til Hintikkas definisjon. Begrenser man seg til de formlene i L som utelukkende er bygget opp ved hjelp av de setningslogiske konnektivene samt de to operatorene som har med tro og gjøre, B;a(F) og C;a(F), viser det seg at de formlene i denne mer begrensede del av L som er forsvarlige i Hintikkas forstand svarer nøyaktig til teoremene i modalsystemet KD4. Tilsvarende vil det være slik at de forsvarlige formlene i L som bare er dannet ved hjelp av de setningslogiske konnektivene og operatorene K;a(F) og P;a(F) svarer til teoremene i modalsystemet KT4 gitt at P;a defineres ved hjelp av K;a ved P;a(F) <–> ¬K;a(¬F). I tillegg til disse formlene i L er også følgende formel, som sier at dersom a vet at F er tilfelle så er det også slik at a tror at F er tilfelle, ie. K;a(F) –> B;a(F) forsvarlig.

I modellteoretiske termer kan klassen av de forsvarlige formlene i språket L karakteriseres på følgende måte. Med en binær relasjonell struktur forstås et triple <X,R;1,R;2> der X er en ikke-tom mengde og R;1, R;2 to relasjoner over X. I en slik modellstruktur er det meningen at X skal representere klassen av de mulige verdenene og R;1 og R;2 henholdsvis den doxastiske og den epistemiske alternativrelasjonen over X.

Med en verditilordning over et språk av typen ovenfor med hensyn på en slik binær relasjonell struktur <X,R;1,R;2> forstår vi en funksjon V som avbilder mengde av setningsbokstaver i L på delmengder av X. Man kan nå definere hva som menes med at en formel F er sann i verdenen w relativt til strukturen <X,R;1,R;2> og verditilordningen V på nøyaktig samme måte som i §2.2. I denne definisjonen kan man beholde punktene (i) – (vi) om man overalt erstatter "<X,R> " med "<X,R;1,R;2>". Klausulene (vii) og (viii) må imidlertid erstattes med:

(vii) True(B;a(F),w,<X,R,1,R;2>,V) <–>
(Ay)(wR;1y –> True(F,y,<X,R,1,R;2>,V))
(viii) True(C;a(F),w,<X,R,1,R;2>,V) <–>
(Ey)(wR;1y & True(F,y,<X,R,1,R;2>,V))
(ix) True(K;a(F),w,<X,R,1,R;2>,V) <–>
(Ay)(wR;2y –> True(F,y,<X,R,1,R;2>,V))
(viii) True(P;a(F),w,<X,R,1,R;2>,V) <–>
(Ey)(wR;2y & True(F,y,<X,R,1,R;2>,V))

En modell for språket L som ble spesifisert ovenfor kan nå defineres som et ordnet par <<X,R;1,R;2>,V> der <X,R;1,R;2> er en binær relasjonell struktur og V er en verditilordning for L med hensyn på denne strukturen. En formel F i språket kalles gyldig hvis og bare hvis F er sann i verdenen w relativt til strukturen <X,R;1,R;2> og verditilordningen V for enhver slik struktur <X,R;1,R;2> og enhver verditilordnig V. En formel kalles gyldig i modellen <<X,R;1,R;2>,V> hvis og bare hvis:

(Ay)(yêX –> True(F,y,<X,R;1,R;2>,V))

De forsvarlige formlene i språket som ble spesifisert ovenfor vil da være alle de formlene som er gyldige i alle de modeller <<X,R;1,R;2>,V> der R;1 er en transitiv og seriel relasjon, hvor videre R;2 er en transitiv og refleksiv relasjon og hvor man dessuten har at R;1 Inkl R;2.

Referanser

Chellas [1], Chellas, Brian F., *Modal Logic* , Cambridge, Cambridge University Press, 1980
Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del I.* , Maskinskrevet manuskript, 1986
Rognes [4], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del II, Bevis for teoremer.*, Maskinskrevet manuskript, 1987
Rognes [5], Rognes, Morten, *Et sammendrag av en teori om egenskaper og presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [6], Rognes, Morten, *Egenskaper. Et sammendrag av to mulige teorier*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Shoenfield [1], J. R. Shoenfield, "Mathematical Logic", Addison Wesley, 1967.